

## 軸対称音速ノズルからの乱流噴流に関する数値解析

榎村 秀男・宮里 義昭\*1・松尾 一泰\*1

## Numerical Analysis of Turbulent Jet from Axisymmetric Sonic Nozzle

Hideo KASHIMURA, Yoshiaki MIYAZATO and Kazuyasu MATSUO

## Abstract

The numerical analysis of turbulent jet from axisymmetric sonic nozzle using the compressible  $k-\epsilon$  turbulence model and TVD scheme was carried out. The pressure ratio of sonic jet is settled from 1.893 to 15 in the this study. The pressure and Mach number distributions in the axial direction was determined and the flow fields are visualized by density distributions. The equation of potential core and cell lengths are proposed from these results. The relationship between the length of cell structure and fully expanded jet Mach number is investigated by the simple equation.

Key words: Sonic nozzle, Under expanded jet, Shock cell length,  $k-\epsilon$  turbulence model, Numerical analysis

## 1. ま え が き

超音速噴流の研究に関しては、流体騒音<sup>(1)-(3)</sup>、噴流を利用した機器開発<sup>(4)</sup>、凝縮<sup>(5)</sup>や内部エネルギーの非平衡<sup>(6)</sup>などの実在気体効果を考慮した研究など数多くの論文がある。著者らは 転炉のランスや溶融亜鉛めっき工程におけるガスジェットワイピングなどに関連して数値流体力学 (CFD; Computational fluid dynamics) の手法を用いて、超音速噴流に関する一連の研究を行ってきた<sup>(7)-(10)</sup>。

Seiner らはノズル出口マッハ数が 2 の超音速不足膨張噴流について、圧縮性乱流モデルによる結果の違いを比較検討するとともに、ノズル出口に近い近距離場におけるセル構造を伴う流動特性と音響特性、特に衝撃波連成騒音との関係を調査した<sup>(11)</sup>。

一方、Liu らは Large-eddy-simulation (LES) により、ノズル出口マッハ数 1.5 の不足膨張および過膨張噴流の流動特性と近距離場における音響特性を調査している<sup>(12)</sup>。

本研究ではノズル出口における気体の速度が音速に等しい音速噴流の軸対称流れについて、主としてマッハディスクが発生しない圧力比での噴流 (Moderately expansion jet) の内部構造について数値計算により調査する。

## 2. 数値計算方法および計算条件

本研究で用いた基礎式は軸対称非定常圧縮性ナビエースト

ークス方程式であり、これに、標準型  $k-\epsilon$  乱流モデルに圧縮性の効果を考慮した改良型モデルを組み込んだ。流れは軸対称であると仮定し、噴流の中心軸上で対称条件を用いることによって、計算領域は中心軸を含む断面の片側のみとした。計算の基礎式、計算領域、計算格子数等は既報<sup>(7)</sup>で詳述したとおりのものである。圧力や密度などの状態量の解析には定常状態に達した後の計算回数 10000 ステップ分の時間平均値を用いた。

表 1 に計算に用いたノズルおよび貯気槽 (添字 0) および排気状態 (添字 b) を示している。ノズルは出口直径  $d=1\text{mm}$ 、出口マッハ数  $M_e=1$  の軸対称音速ノズル、気体は空気 (比熱比  $\kappa=1.4$ ) である。噴流の圧力比  $\phi$  は適正膨張が得られる 1.893 から 15 の範囲とした。なお、 $M_e=1$  の軸対称音速ノズルでは圧力比  $\phi$  がおおむね 3.8 以上では、噴流中にマッハディスクが形成される<sup>(13)</sup>。

Table1 Numerical conditions

Nozzle	
Geometry	Axisymmetric
Nozzle Mach number $M_e$	1
Nozzle exit diameter $d$	1 mm
Reservoir conditions	
Gas	Air
Pressure ratio $\phi (=p_o / p_b)$	1.893~15.0
Temperature $T_o$	291.7 K
Ambient conditions	
Gas	Air
Pressure $p_b$	101.3 kPa
Temperature $T_b$	291.7 K

\*1 北九州市立大学国際環境工学部  
機械システム工学科 教授  
(〒808-0135 北九州市若松区ひびきの 1-1)

3. 計算結果

3. 1 密度分布

図1は3種類の圧力比に対して噴流の内部構造を密度分布により可視化している。(a)はノズル出口圧力が背圧に等しい適正膨張、(b) (c)はノズル出口圧力が背圧よりも高い不足膨張噴流である。不足膨張噴流は、空気の音速噴流に対して  $1.893 < (p_0/p_b) < 3.8$  の場合を中程度の膨張 (Moderately expansion)、 $(p_0/p_b) > 3.8$  の場合を高度の膨張 (Highly expansion) として区別している<sup>(13)</sup>。後者の場合、噴流中にマッハディスクとよばれる円板状の垂直衝撃波が発生する。図1ではそれぞれの例を示している。

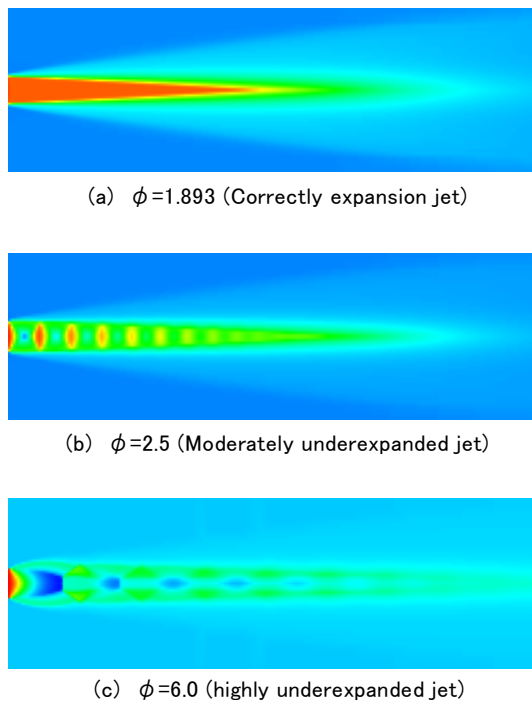


Fig.1 Density distribution of correctly expansion, moderately and highly underexpanded jets

3. 2 中心軸上の圧力およびマッハ数の変化

図2に貯気圧  $p_0$  で無次元化された噴流中心軸上の圧力を図1の計算条件の場合に対して示している。数値計算ではノズル出口での圧力比  $p^*/p_0$  を境界条件として 0.528 で与えている。 $\phi = 2.5$  の噴流においてはノズル出口から膨張領域と圧縮領域が交互に繰り返され、 $x/d=8$  においてこのような変動が消滅した後、 $x/d = 10$  から一旦減少したのち、背圧  $p_b/p_0 = 0.4$  に向けて漸近する。 $\phi = 6.0$  の噴流では  $x/d = 1.5$  においてマッハディスクによる急激な圧力の上昇が観察される。

図3に中心軸上のマッハ数の変化を示す。圧力比  $\phi = 1.893$  の適正膨張ではノズル出口のマッハ数が  $x/d = 8$  まで  $M_e = 1$  に保たれたままで、それ以上の  $x/d$  では単調に減少する。

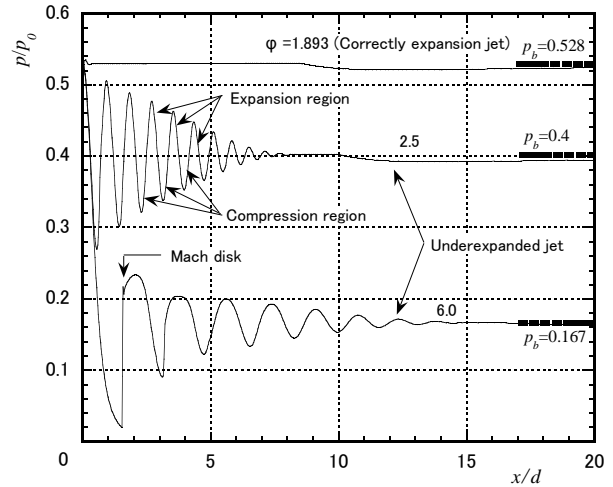


Fig.2 Pressure distribution on jet axis

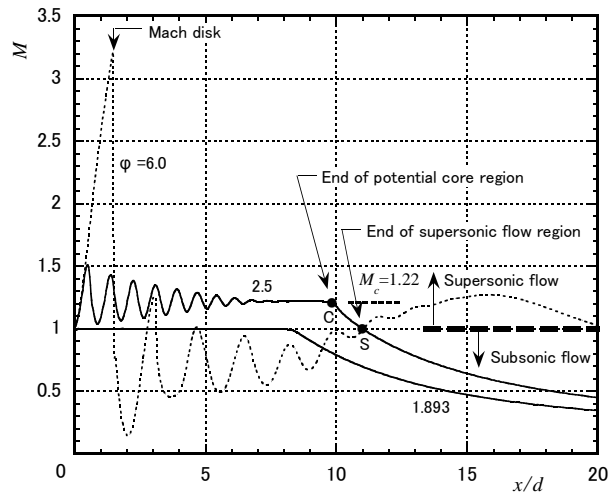


Fig.3 Mach number distribution on jet axis

$\phi = 2.5$  ではマッハ数は  $M > 1$  の超音速の範囲で増加と減少を繰り返し、 $M_c = 1.22$  に漸近する。その後、点Cで示す  $x/d = 9.8$  の位置から減少を始め、点Sで示す  $x/d = 11$  の位置で流れが超音速から亜音速に遷移する。点Cは噴流中心部におけるポテンシャルコアの終端部と考えられる。前述の中程度の膨張範囲ではこのようなマッハ数の変化をたどる。一方、マッハディスクが形成される  $\phi = 6.0$  の噴流ではノズル出口部の超音速の流れはマッハディスクによって  $M < 1$  の亜音速まで不連続に減少し、その後、超音速と亜音速の間で不規則に増加と減少を繰り返す。このようにマッハ数が不規則に変化する流れは  $\phi > 3.8$  の高度の膨張で見られる。

4. 考察

4. 1 ポテンシャルコア長さおよびポテンシャルコア終端におけるマッハ数

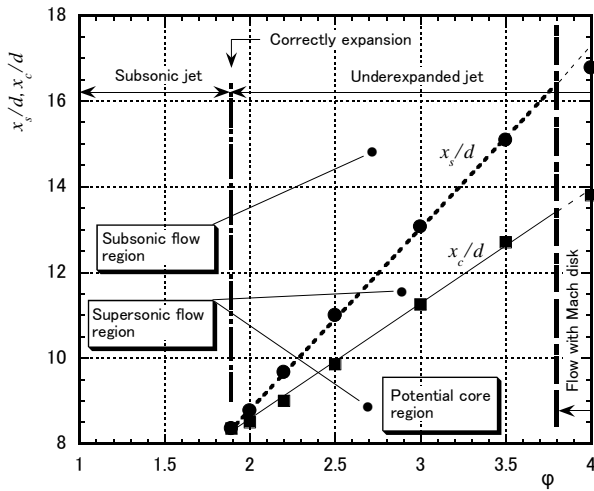


Fig.4 Potential core and supersonic flow lengths versus pressure ratio  $\phi$

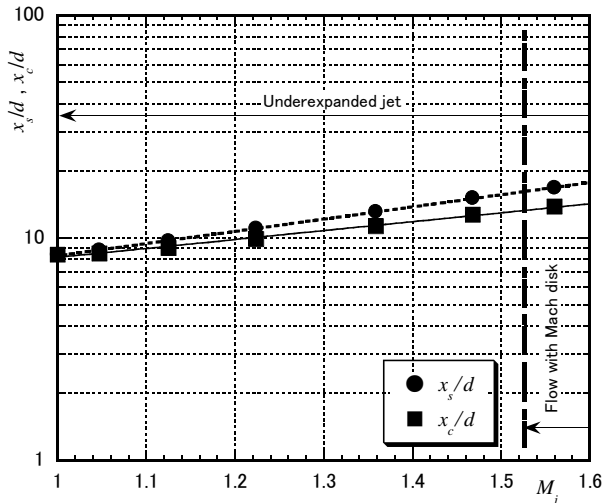


Fig.5 Potential core and supersonic flow length versus fully expanded jet Mach number  $M_j$

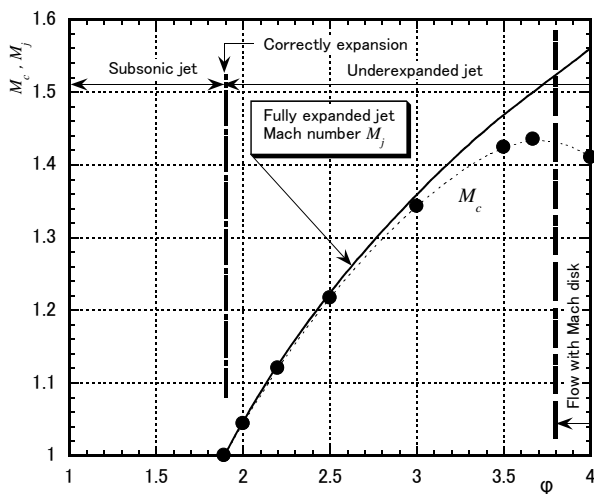


Fig.6 Flow Mach number  $M_c$  at end of potential core

図4は図3中に示す点CとSの  $x/d$  が圧力比  $\phi$  によってどのように変化するかを示したものである。すなわち、点Cは中心軸上におけるポテンシャルコア終端部の位置、点Sは超音速部終端部の位置である。よって、図4に示す通り、例えば、 $\phi=3$  の噴流では  $0 < (x/d) < 13$  が超音速流れ、 $(x/d) > 13$  が亜音速流れ、超音速流れ部のうち  $(x/d) < 11.2$  がポテンシャルコア部である。図に示す通り、 $1.893 < \phi < 3.8$  の中度の不足膨張噴流においては  $\phi$  の増加とともに直線的に増加することがわかる。圧力比  $\phi (=p_0/p_b)$  を用いて次式で計算される  $M_j$  は一般に、‘Fully expanded jet Mach number’ とよばれる<sup>(14)</sup>。この値は  $p_0/p_b$  に対する適正膨張時のノズル出口マッハ数と考えることができ、 $\phi=1.893$  の時  $M_j=1$ 、 $\phi=3.8$  の時  $M_j=1.525$  である。

$$M_j = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left\{ \left( \frac{p_0}{p_b} \right)^\frac{\kappa-1}{\kappa} - 1 \right\}} \dots \dots \dots (1)$$

この関係を用いて、図4の結果を再度示したものが図5である。図に示す通り、片対数グラフ上でこの関係は直線となり、次式で最小二乗近似直線が表わされる。

$$\frac{x_s}{d} = 2.36 \times e^{1.26 M_j} \dots \dots \dots (2)$$

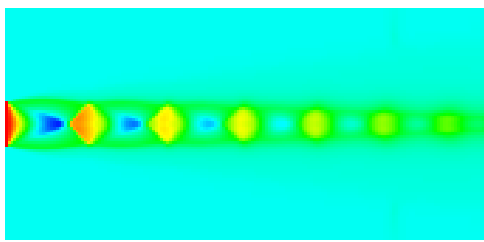
$$\frac{x_c}{d} = 3.25 \times e^{0.92 M_j} \dots \dots \dots (3)$$

ポテンシャルコア終端部におけるマッハ数  $M_c$  (図3に示す  $\phi=2.5$  の場合は 1.22) と圧力比  $\phi$  との関係を図6に示す。図中には式(1)で計算される  $M_j$  の曲線も併記している。この図より、マッハディスクを発生しない中度の膨張領域において、 $M_c$  は  $\phi$  の増加とともに単調に増加することがわかる。特に、3以上の比較的高い圧力比では  $M_c$  は  $M_j$  と一致せず、等エントロピー流れの仮定が成り立たないといえる。

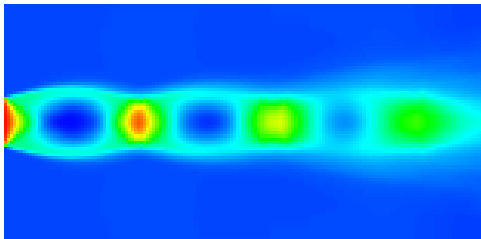
4. 2 セル構造の二次元噴流との比較

図7は圧力比  $\phi=4$  に対して二次元噴流との内部構造の比較を、密度値を使って行っている。(a)が軸対称噴流、(b)が二次元噴流を示し、この場合の計算方法は既報<sup>(9)</sup>で述べたとおりである。赤(橙)は密度がもっとも高く、黄緑青の順に値が低くなっていく。軸対称の場合の色の出現周期は二次元噴流の場合の概略、半分であることがわかる。また、二次元噴流の場合の緩慢な色の変動に対して、軸対称の噴流では急峻な色変化を伴う、ショックセル構造であることがわかる。

図8は、この時の中心軸上の圧力変化を示している。横軸は、軸対称の場合はノズル出口直径  $d$ 、二次元の場合はノズル高さ  $h$  を用いて、ノズル出口からの距離  $x$  を無次元化し



(a) Axisymmetric sonic jet



(b) Two-dimensional sonic jet

Fig.7 Density distributions showing comparison with two dimensional jet ( $\phi=4$ )

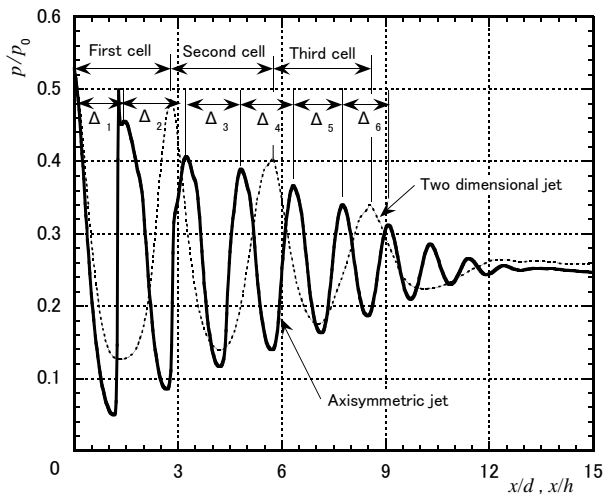


Fig.8 Pressure distribution on jet axis showing comparison with two dimensional jet

ている。実線は軸対称、点線は二次元噴流を表している。いずれの噴流においてもノズルの出口では圧力の境界条件  $p^*/p_0=0.528$  が計算で用いられている。長さの無次元値が約 12 になると大きな圧力の振動はなくなり、 $p/p_0=0.25$  に漸近するが、この間に二次元では圧力が右下がりの曲線で示される膨張部、右上がりの曲線で示される圧縮部が 4 周期であるのに対し、軸対称では 9 周期が存在する。中心軸上の圧力で定義したセル長さを二次元では First cell、Second cell、Third cell で示している。なお、後述のために、軸対称の場合の無次元のセル長さをノズル出口に近いほうから順に

$\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ 、 $\dots$ とする。この圧力比ではマッハディスクが発生しているが、中度の圧力比  $1.893 < (p_0/p_b) < 3.8$  ではマッハディスクは発生しない。

#### 4. 3 セル構造における最大および最小マッハ数

圧力比  $\phi=2.0$ 、 $2.5$ 、 $3.5$  の噴流中心軸上の  $x/d$  に最大マッハ数と最少マッハ数の変化を図 9 に示す。図中の C はポテンシャルコア領域の終端位置を示し、矢印の付いた波線はそれぞれの圧力比の噴流におけるポテンシャルコア終端部のマッハ数を示している。また、塗りつぶした四角、丸、菱形はセル構造における最大マッハ数、白抜きの四角、丸、菱形は最小マッハ数を示し、 $n$  はノズル出口から数えたセル番号を示している。また、図中にはマッハ数の最大値と最小値を結ぶ直線を実線で、圧力比の異なる噴流の最大値同士を結ぶ直線を点線で記入している。図より、塗りつぶした記号で表した最大マッハ数をつなぐ曲線は圧力比により高さが異なるものの、白抜きの記号で表した最小マッハ数は噴流圧力比によらず、ほぼ一つの曲線上にあることがわかる。

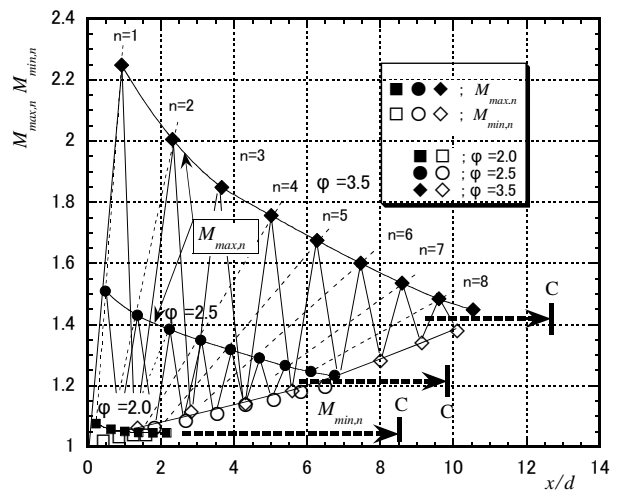


Fig.9 Maximum and minimum Mach number  $M_{max}$ ,  $M_{min}$  at each cell structures

#### 4. 4 近距離場におけるセルの平均長さ

本研究では、図 9 に示す中心軸上のマッハ数分布の最小値の位置 (圧力の最大値の位置に一致している) からセル長さ  $\Delta$  を定義し、これにより求めたセル長さの累計値の変化を図 10 に示す。 $n$  はセル番号、対応する  $x/d$  は  $(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)$  により計算される。図中の直線はノズル出口近傍の 4 つのセルを用いて最小二乗近似により求めたもので、5 セル目以降は破線で示している。図より  $n$  の増加とともに直線から離れることがわかる。すなわち、セルの長さは噴流の下流に行くほど小さくなるといえる。

図 9 で示す近似直線の勾配すなわちノズル近傍の 4 つのセルの平均セル長さの圧力比による違いを示したものが図 11 である。丸印は数値計算結果を示し、 $\phi$  の増加とと

もに平均セル長さは増加するものの増加割合は少なくなることがわかる。また、図中のセル長さは Vortex sheet model を用いた次式<sup>(12)</sup>により計算した結果を示し、両者はよく一致することがわかる。

$$\Delta = 0.4158\pi(M_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (4)$$

図中には白抜き記号で Large eddy simulation モデルを用いた結果<sup>(12)</sup>も併記している。

図 12 は式(1)の関係を用いて図 11 の横軸を  $\phi$  に変換し、平均セル長さと  $\phi$  の関係を示したものである。また、Vortex sheet model を表す曲線は、式(4)に式(1)を代入して得られる式(5)の関係を示している。

$$\Delta = 0.4158\pi \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left\{ \left( \frac{p_0}{p_b} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} - 1} \dots \dots (5)$$

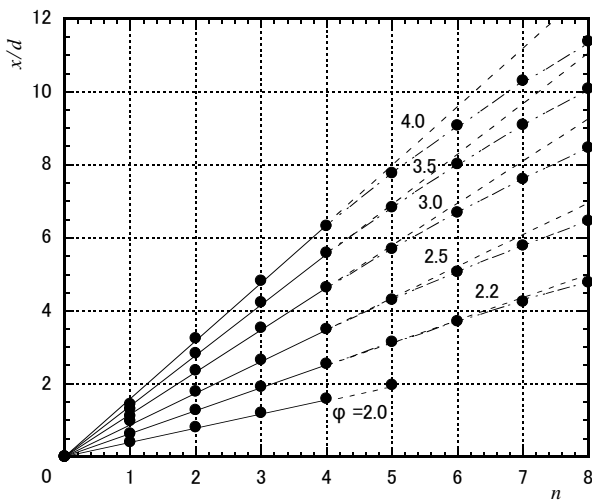


Fig.10 Distance from nozzle exit to end of each cell structure

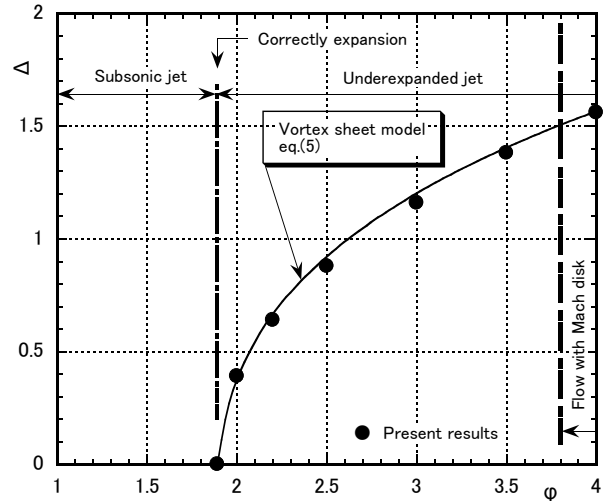


Fig.12 Average cell length  $\Delta_{n,m}$  near field jet flow versus pressure ratio  $\phi$

4. 5 セルの局所長さ

図 13 は噴流の各圧力比に対してセル番号  $n$  とセル長さ  $\Delta_n$  の関係を示している。また、太い破線によって Vortex sheet model による値も示している。いずれの圧力比においても第1セル長さ  $\Delta_1$  に比べて第2セル長さ  $\Delta_2$  の方が大きく、第2セル以降は  $n$  の増加とともに直線的に減少していることがわかる。今後、第2セルの長さが最も大きくなることの原因について検討する必要がある。参考のため、白抜き記号によって、 $\phi = 3.76 (M_j = 1.51)$  での Miller<sup>(14)</sup> の結果を示している。これは論文中に記載の噴流中心軸上のマッハ数分布から著者が  $\Delta_n$  を読み取ったものである。この結果についても本研究と同様の傾向が得られている。

図 14 はセル番号  $n=2$  から 8 ( $\phi=2$  では  $n=5$  まで) までのセル長さの平均減衰量と噴流圧力比  $\phi$  の関係を示す。すなわち縦軸の  $\xi$  は  $\xi = \Delta_n - \Delta_{n-1}$  で計算されている。図より  $\xi$  は適正膨張の圧力比を原点  $\xi=0$  として噴流圧力比の増加とともに単調増加していることがわかる。図中の直線は計算結果の最小二乗近似直線である。

式(1)を用いて  $M_j$  との関係に置き換えたものが図 15 である。図中の直線は黒丸で示された計算点を直線で近似したもので、この関係は次式で示される。

$$\xi = 0.018(M_j - 1) \dots \dots \dots (6)$$

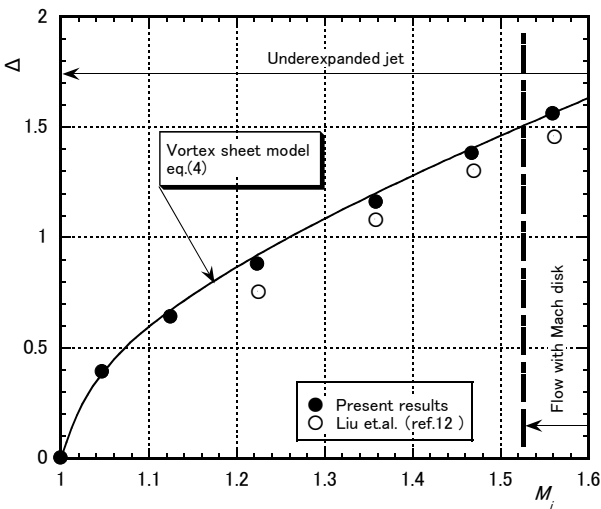


Fig.11 Average cell length near field jet flow versus fully expanded jet Mach number  $M_j$

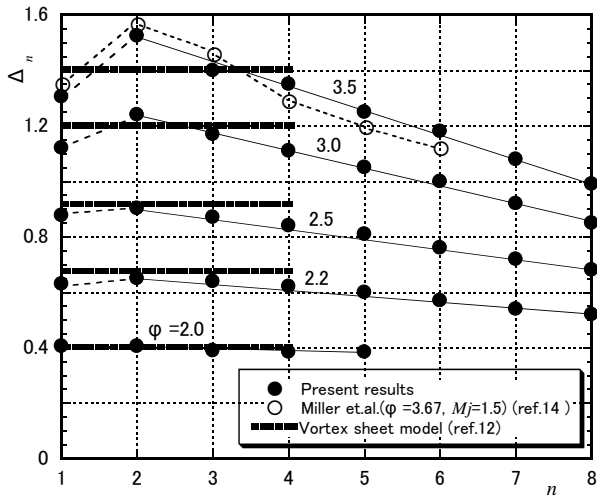


Fig.13 Alteration of local cell length  $\Delta_n$

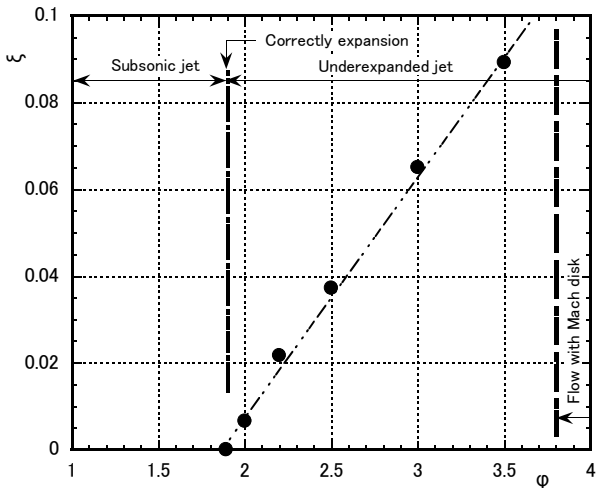


Fig.14 Magnitude of reduction in cell length versus  $\phi$

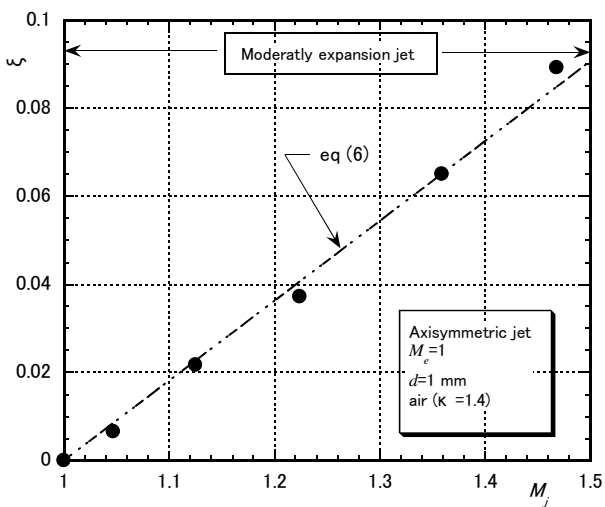
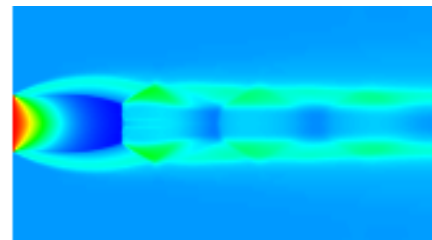


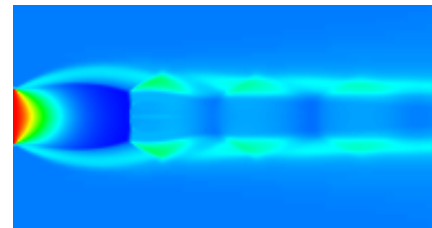
Fig.15 Magnitude of reduction in cell length versus  $M_j$

#### 4. 6 マッハディスクの形成位置

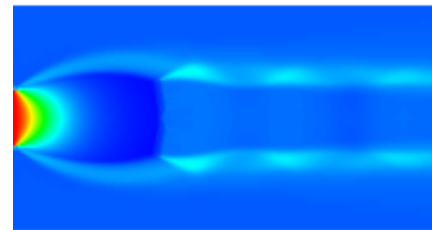
図 16 はマッハディスクが形成される高度の不足膨張域噴 ( $p_0/p_b > 3.8$ ) に対する計算結果の一例である。いずれにおいても密度の分布を示しており、噴流中に中心軸と垂直に不連続面を形成している。図に示すように圧力比の増加とともにマッハディスクは下流に移動し、直径は大きくなる。マッハディスクの直径や位置について多くの研究があるが、本研究では前述した中度の膨張域に発生するセル構造における第 1セル長さ  $\Delta_1$  および第 2セル長さ  $\Delta_2$  とマッハディスク位置の関係に着目して調べる。



(a)  $\phi = 8.0$



(b)  $\phi = 10.0$



(c)  $\phi = 15.0$

Fig.16 Density distribution of highly expansion jets showing appearance of Mach disk

図 17 は噴流圧力比とノズル出口直径  $d$  で無次元化したマッハディスクの形成位置  $L_m$  の関係を示している。また、中度の膨張域 ( $1.893 < p_0/p_b < 3.8$ ) におけるセル長さ  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  を併せて示している。

マッハディスクの形成位置に関して Driftmyer は次式を与えている<sup>(15)</sup>。

$$\frac{L_m}{d} = \left[ \frac{1}{j+1} \left( \frac{\kappa M_e^2 p_e}{p_b} \right) \right]^{j+1} (\kappa M_e)^{j-1} \dots (7)$$

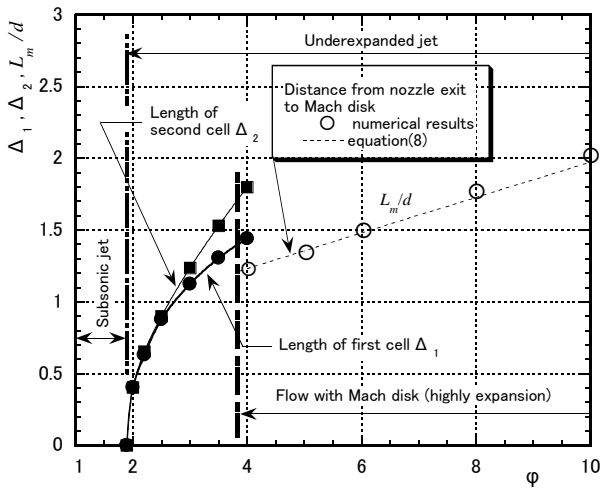


Fig.17 Location of Mach disk of highly expansion jet and cell length of first and second cells

ここで、 $M_e$  はノズル出口マッハ数、 $p_e$  はノズル出口圧力、 $j$  は定数 (1: 軸対称, 0: 二次元)、 $\kappa$  は比熱比である。式(6)を  $\kappa=1.4$  の軸対称音速噴流に適用すると次の関係を得る。

$$\frac{L_m}{d} = 0.608\sqrt{\phi} \dots \dots \dots (8)$$

式(8)による計算結果を図中に示しており、数値計算結果との良好な一致が見られる。図中の太い一点鎖線で示す中度膨張から高度膨張へ遷移する圧力比において示すように、マッハディスクの発生位置  $L_m/d$  は第1セルの長さ  $\Delta_1$  よりも小さいことがわかる。

5. 結 論

軸対称音速ノズルからの乱流噴流について圧力比 1.893 から 15 の間で数値計算を行った。その結果により、マッハディスクが形成されない中度の不足膨張域 (Moderately expansion) について噴流の内部構造、セル長さに着目して考察を行い、さらに高度の膨張域 (Highly expansion) についてマッハディスク位置を調査した。

得られた結果を要約すると、以下の通りである。

- (1) 噴流中心軸上におけるポテンシャルコア長さおよび超音速領域長さを図 4 および図 5 で示し、その関係を式(2)、(3)のように定式化した。
- (2) ポテンシャルコア終端部におけるマッハ数  $M_e$  を図 6 で示し、低い圧力比においては Fully expanded jet Mach number  $M_j$  に一致することを明らかにした。
- (3) ノズル出口近傍におけるセルの平均長さを図 11 および図 12 のように求め、Vortex sheet model による結果と一致することを示した。

- (4) セルの局所長さの変化を図 13 で示し、この結果を用いてセル長さの平均減衰量を図 14 および図 15 のように明らかにした。また、この量を式(6)のように定式化した。
- (5) マッハディスクの形成位置について Driftmyer の式(7)を用いて検討し、セル長さと一緒に図 17 で示した。

参 考 文 献

- (1) C.K.W.Tam, Broadband Shock Associated Noise from Supersonic Jets Measured by a Ground Observer, AIAA J., Vol.30, No.10 (1992), pp.2395-2401.
- (2) C.Y.Loh, et.al., Jet Screech Noise Computation, AIAA J., Vol.44, No.5 (2006), pp.992-998.
- (3) C.K.W.Tam, Mach Wave Radiation from High-Speed Jets, AIAA J., Vol.47, No.10 (2009), pp.2440-2448.
- (4) M.K.Ibrahim, et.al., Mixing Enhancement of Compressible Jets by Using Unsteady Microjets as Actuators, AIAA J., Vol.40, No.4 (2002), pp.681-688.
- (5) Y.Otobe et.al., Hysteretic Phenomenon of Underexpanded Moist Air Jet, AIAA J., Vol.47, No.12 (2009), pp.2792-2811.
- (6) J.L.Palmer et.al., Application of Method of Characteristics to Underexpanded, Freejet Flows with Vibrational Nonequilibrium, AIAA J., Vol.36, No.2 (1998), pp.193-200.
- (7) 榎村・片野田・松尾、 $k-\epsilon$  乱流モデルを用いた適正膨張超音速噴流の数値解析 (第1報、数値解析法の検証)、北九州工業高等専門学校研究報告、第 39 号 (平成 18)、pp.75-81.
- (8) 榎村・佐川・松尾、 $k-\epsilon$  乱流モデルを用いた適正膨張超音速噴流の数値解析 (第2報、ポテンシャルコアのマイクロな構造)、北九州工業高等専門学校研究報告、第 40 号 (平成 19)、pp.67-72.
- (9) 榎村・宮里・松尾、二次元音速ノズルからの乱流噴流に関する数値解析 (第1報、噴流構造)、北九州工業高等専門学校研究報告、第 42 号 (平成 21)、pp.31-38.
- (10) 榎村・宮里・松尾、二次元音速ノズルからの乱流噴流に関する数値解析 (第2報、垂直平板との衝突)、北九州工業高等専門学校研究報告、第 43 号 (平成 22)、pp.45-50.
- (11) J.M.Seiner et.al., Analysis of Turbulent Undeexpanded Jets, Part II: Shock Noise Features Using SCIPVIS, AIAA J., Vol.23, No.5 (1985), pp.669-677.
- (12) J.Liu, et.al., Large-Eddy Simulations of a Supersonic Jet and Its Near-Field Acoustic Properties, AIAA J., Vol.47, No.8 (2009), pp.1849-1864 .
- (13) A.Powell, The sound-producing oscillations of round underexpanded jets impinging on normal plates, J. Acoust Soc. Am., Vol83, No.2 (1988), pp.515-533.
- (14) S.A.E.Miller, et.al., Assessment of Computational Fluid Dynamics for Supersonic Shock Containing Jets, AIAA J., Vol.47, No.11 (2009), pp.2738-2746.
- (15) R.T.Driftmyer, A Correlation of Freejet Data, AIAA J., Vol.10, No.8 (1972), pp.1093-1095.

(2010 年 10 月 14 日 受理)