

# 二次元音速ノズルからの乱流噴流に関する数値解析

## (第1報、噴流構造)

榎村 秀男・宮里 義昭\*1・松尾 一泰\*1

### Numerical Analysis of Turbulent Jet from Two-Dimensional Sonic Nozzle

#### (1<sup>st</sup> Report, Structure of Jet)

Hideo KASHIMURA, Yoshiaki MIYAZATO and Kazuyasu MATSUO

#### Abstract

The numerical analysis of turbulent jet from two-dimensional sonic nozzle using the compressible  $k-\epsilon$  turbulence model and TVD scheme was carried out. The pressure ratio of sonic jet is settled from 1.893 to 6 in the this study. The pressure distribution in the axial direction was determined and the flow fields are visualized by computer schlieren technique. The flow model of two-dimensional sonic jet is proposed from these results. The relationship between the length of shock cell structure and pressure ratio is investigated and the results are shown by the simple equation.

*Key words: Sonic nozzle, Under expanded jet, Shock cell length,  $k-\epsilon$  turbulence model, Numerical analysis*

#### 1. ま え が き

二次元音速噴流は航空工学分野における VSTOL<sup>(1)(2)</sup>、鉄鋼材料分野における溶融亜鉛めっき工程のガスジェットワイピング<sup>(3)(4)</sup>などで利用されており、衝突噴流の騒音問題<sup>(5)(6)</sup>などに関連した研究もなされている。

ノズルの出口が円形の軸対称音速噴流に関しては解説記事<sup>(7)</sup>や多くの研究<sup>(8)~(10)</sup>がなされている。しかし、二次元噴流に関してはノズル出口近傍における噴流の内部構造について特性曲線法を用いた解析<sup>(11)</sup>や圧力比が非常に大きい場合のマッハディスクの形成位置に関する統一的な整理法<sup>(12)</sup>などの研究があるものの、軸対称噴流の場合に比べて少ない。

本研究では、ノズルのアスペクト比が無量大の二次元ノズルから発生する音速噴流に関して、圧縮性乱流モデルを考慮したナビエーストークス方程式の数値解析により、その特性を明らかにする。噴流の圧力比は適正膨張時の圧力比から比較的低い圧力比までを対象とする。第1報では、数値計算結果から得られた密度分布より流れ場の可視化画像を構築し、中心軸上の圧力分布と対応させることにより二次元音速噴流の流れ場のモデル図を提案するとともに、セル長さに関する定式化を行った。

#### 2. 基礎方程式および計算条件

本研究で用いた主な記号および計算領域を図1に示す。二次元音速ノズルの出口中心  $O$  を  $(x-y-z)$ 座標の原点とし、噴流の下流方向に  $x$ 、紙面の上下方向に  $y$ 、奥行き方向に  $z$ 座標を考える。対象としている噴流は二次元であるから、紙面と垂直方向の  $z$ 軸に対しては無量の厚みがある。ノズルの出口高さを  $h$  とし、出口マッハ数  $M_e$  は 1 である。作動気体は乾燥空気を考え、背圧  $p_b$  は大気圧、貯気圧力  $p_0$  と  $p_b$  の比を  $\phi$  とした。

計算に用いた基礎式は式(1)の二次元非定常圧縮性ナビエーストークス方程式である<sup>(13)</sup>。乱流モデルとして、標準型  $k-\epsilon$  乱流モデルに、Sarkar ら<sup>(14)</sup>による圧縮性項を組み

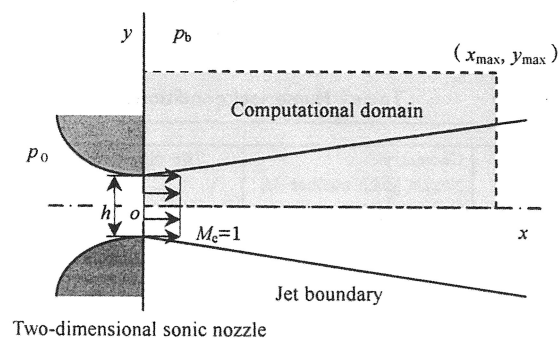


Fig.1 Symbols and computational domain

\*1 北九州市立大学国際環境工学部  
機械システム工学科 教授

(〒808-0135 北九州市若松区ひびきの 1-1)

込んだ改良型の乱流モデルを用いた。超音速噴流における、この乱流モデルの妥当性は既報で明らかにしている<sup>(15)</sup>。計算は基礎方程式(1)をノズル出口の音速状態(添字\*で表記)で無次元化し、空間三次精度のTVD差分法<sup>(16)</sup>を3段階Runge-kutta法による時間積分とともに用いて行い、定常状態に達した流れの諸量を用いて流れを解析した。

表1に計算条件を示す。計算の対象とした二次元音速ノズルはノズル出口高さ1mmで、貯気圧力 $p_0$ と背圧 $p_b$ の比 $\phi$ は適正膨張の場合の圧力比1.893から6までとした。気体の温度は既報<sup>(15)</sup>と等しくしている。

計算領域は図1の噴流中心軸を含む断面の片側で、 $x_{max}/h=22.5$ 、 $y_{max}/h=20$ である。計算格子は中心軸近傍に密な不等間隔直交格子とし、軸方向および半径方向にそれぞれ600点および70点とした。ノズル出口では半径方向に30点を与え、一次元等エントロピー流れの関係式から計算される圧力や密度などの状態値を一様流入条件として与えた。なお、流れ場の可視化と解析に際しては、90,000ステップから100,000ステップ間の10,000ステップの時間平均値を用いた。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix} \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ s_1 \end{bmatrix} \quad G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$s_2 = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + k \frac{\partial T}{\partial y}$$

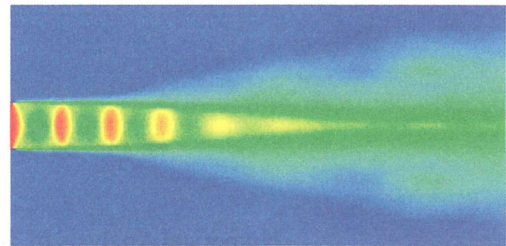
$t$ 、 $p$ 、 $\rho$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $e$ はそれぞれ時間、圧力、密度、流れの $x$ 方向、 $y$ 方向速度成分、単位質量あたりのエネルギー、その他の記号について詳細は既報<sup>(15)</sup>に述べている。

Table1 Numerical conditions

Nozzle		
Geometry	Two dimensional nozzle	
Nozzle Mach number $M_e$	1	
Nozzle height $h$	1 mm	
Reservoir conditions		
Gas	Air	
Pressure ratio $\phi (=p_0/p_b)$	1.893~6.0	
Temperature $T_0$	291.7 K	
Ambient conditions		
Gas	Air	
Pressure $p_b$	101.3 kPa	
Temperature $T_b$	291.7 K	

### 3. 計算結果

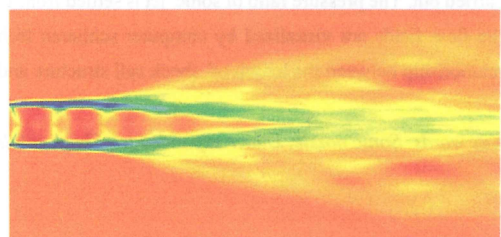
#### 3. 1 密度分布およびコンピュータシュリーレン写真



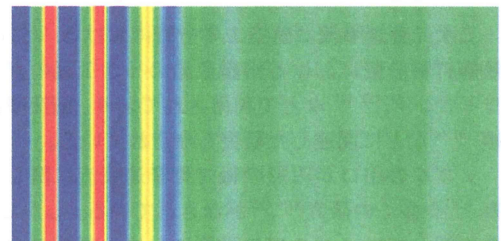
(a) Density distribution (x-y plane)



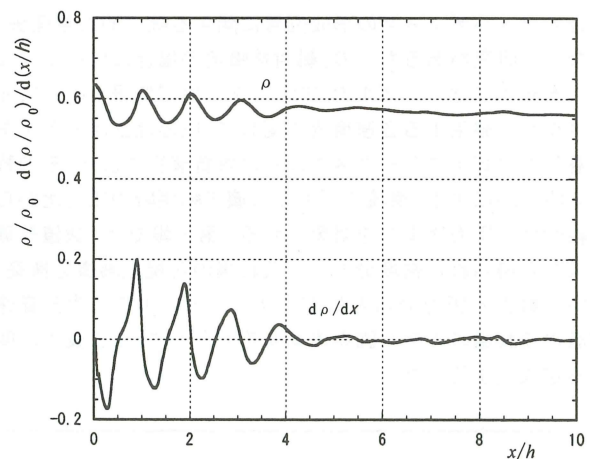
(b) Computer schlieren ( $d\rho/dx$ ; x-y plane)



(c) Computer schlieren ( $d\rho/dy$ ; x-y plane)

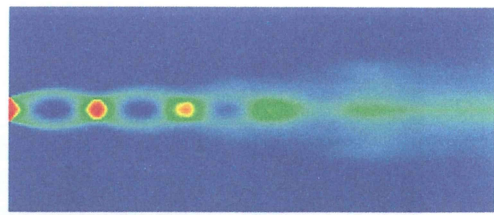


(d) Computer schlieren ( $(d\rho/dx)_{y=0}$ ; x-z plane)

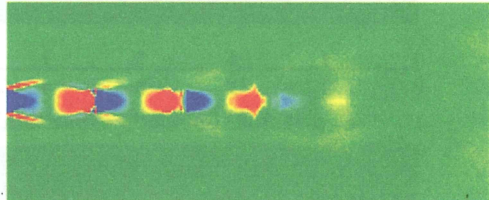


(e) Density distribution on jet axis

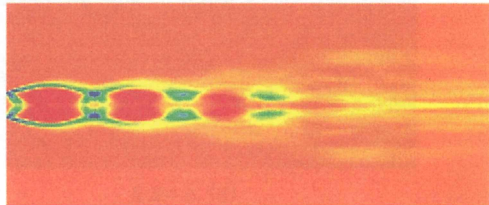
Fig.2 Numerical result ( $\phi=2.2$ )



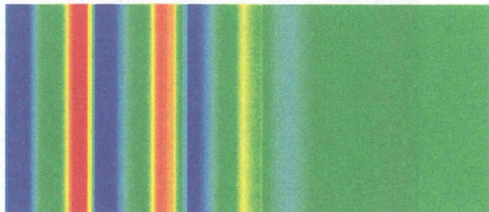
(a) Density distribution (x-y plane)



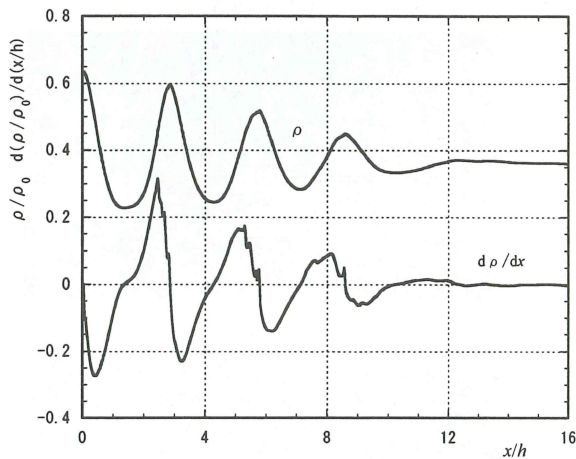
(b) Computer schlieren ( $d\rho/dx$ ; x-y plane)



(c) Computer schlieren ( $d\rho/dy$ ; x-y plane)



(d) Computer schlieren ( $(d\rho/dx)_{y=0}$ ; x-z plane)



(e) Density distribution on jet axis

Fig.3 Numerical result ( $\phi=4$ )

図2は圧力比  $\phi=2.2$  における計算結果を示している。(a)は密度分布、(b)(c)(d)は  $x$  および  $y$  方向に対する密度こう配の値を用いてシュリーレン写真と等価な画像<sup>(17)</sup>を作成した結果である。例えば、(b)では  $x$  方向の密度こう配を  $x$ - $y$  面に投影したことを示している。(d)に中心軸上の密度、密

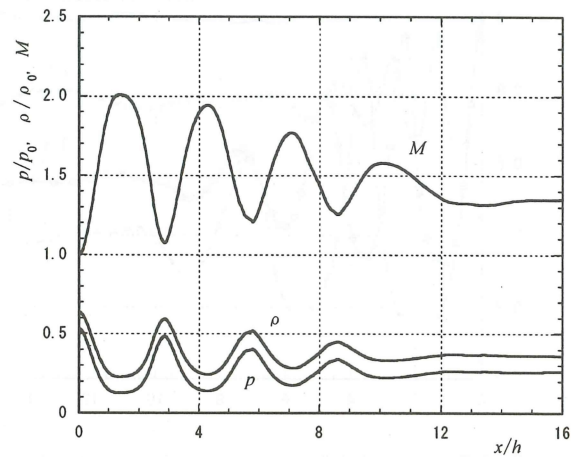
度こう配を示し、画像との関連を示している。中心軸上には  $x/h=4$  まで周期的な密度変動が発生し、これによって  $x$ - $z$  面には赤-青の縞が対となって発生することが確認できる。この縞の色調は下流に行くほど弱くなる。

図3は  $\phi=4$  における同様の計算結果を示している。 $x/h=16$  までを可視化の領域としており、図2の  $x/h=10$  よりも下流までを可視化している。図より、振動の周期幅が  $\phi=2.2$  の場合より大きいことがわかる。

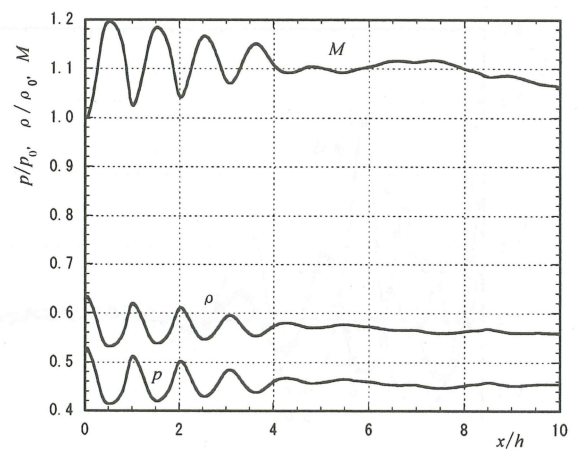
### 3. 2 中心軸上のマッハ数および圧力の変化

圧力比  $\phi=2.2$  および  $4$  における噴流中心軸上の圧力  $p$ 、密度  $\rho$ 、マッハ数  $M$  の変化の関係を図4に示す。図より、圧力の極大、極小位置は密度の極大、極小位置と一致していることがわかる。また、マッハ数は密度と圧力の極大位置で極小、密度と圧力の極小位置で極大となる。

圧力比  $\phi$  を  $1.893$  から  $6$  まで変化した時の中心軸上の圧力の変化を図5および図6に示す。図5は圧力  $p$  をノズル出口圧力  $p^*$  で、無次元化している。図において、 $\phi=1.893$  は適



(a)  $\phi=4$



(b)  $\phi=2.2$

Fig.4 Relationship between  $M, p$  and  $\rho$

正膨張の場合であり、ノズル出口圧力が背圧  $p_b$  に等しい。この圧力比では、ごくわずかな圧力変動が認められるものの、ノズル出口から下流まで  $p$  は  $p^*$  に等しい。圧力比が増加すれば、圧力変動の振幅と周期が大きくなるものの、大きな振動は概ね 3 周期程度で消滅することがわかる。また、ノズル出口からの圧力の減衰は、圧力比を増加しても同じ圧力減衰の曲線上にあることがわかる。

図 6 は中心軸上の圧力を背圧  $p_b$  で無次元化した値  $p/p_b$  で示している。図より圧力比  $\phi$  が低い値ほど振幅が小さく、また、いずれの圧力比においても概ね  $x/h=10$  で圧力振動が無視できる程度になり、噴流中心の圧力は背圧  $p_b$  に等しくなるといえる。

### 3. 3 ショックセル構造の形成過程

図 7 はノズル出口近傍の流れの状態を密度こう配  $d\rho/dy$  で示している。適正膨張の (a) から (e) へと圧力比を増加する

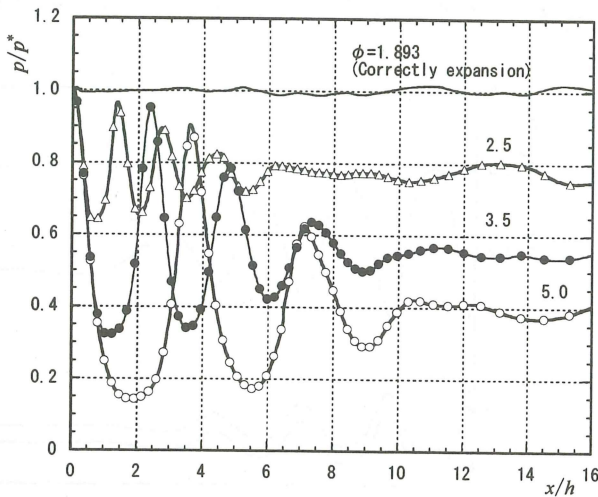


Fig.5 Pressure distribution on jet axis normalized by  $p^*$

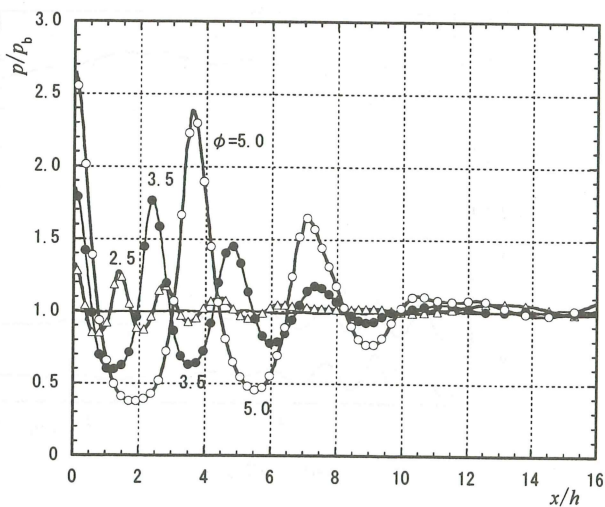
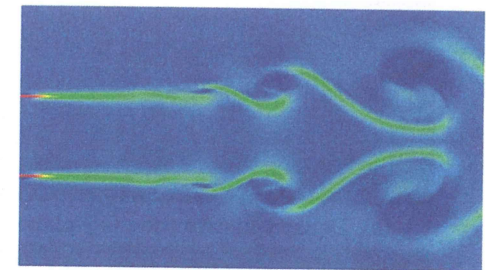
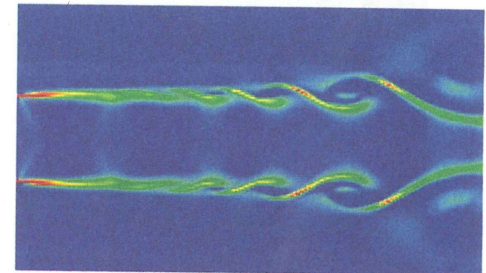


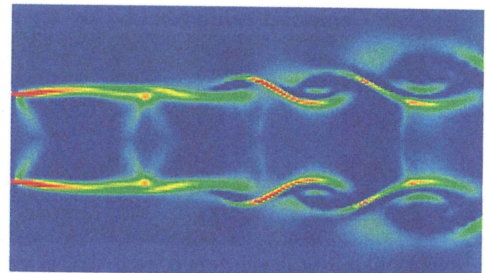
Fig.6 Pressure distribution on jet axis normalized by  $p_0$



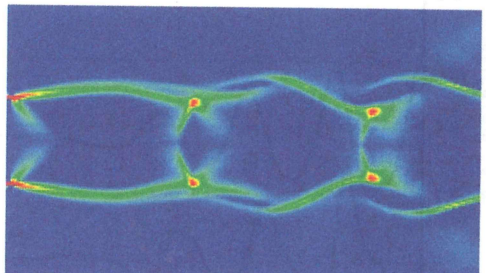
(a)  $\phi=1.893$  (Correctly expansion)



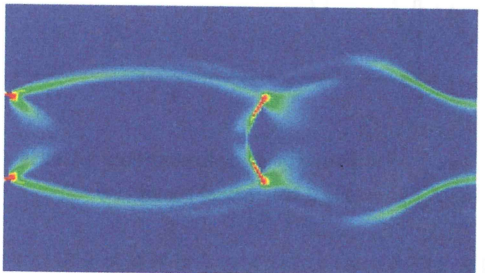
(b)  $\phi=2.2$



(c)  $\phi=2.5$



(d)  $\phi=3$



(e)  $\phi=4$

Fig.7 Computer schlieren photograph showing development to shock cell structure

ことよって、音速噴流内のショックセル構造の発達過程を確認することができる。(c)の $\phi=2.5$ では噴流周囲からの気体の巻き込みによって、 $x/h=2.5$ より下流でせん断層に大きな渦構造が存在することが見られ、また(d)の $\phi=3$ では $x/h=2$ の位置に斜め衝撃波が形成して、噴流境界との交差位置にくびれが発生してセル構造を形成する。(e)に示すように斜め衝撃波は圧力比の増加とともに、下流に移動していくことがわかる。

### 3.4 渦度分布

周囲気体の巻き込みによって噴流中に発生する渦とシュリーレン写真との関連を明らかにするため、一例として図8に適正膨張の場合の渦度分布を示す。図7(a)が同じ圧力比の場合のシュリーレン写真であり、これとの対応によりシュリーレン写真上での渦発生位置を確認することができる。

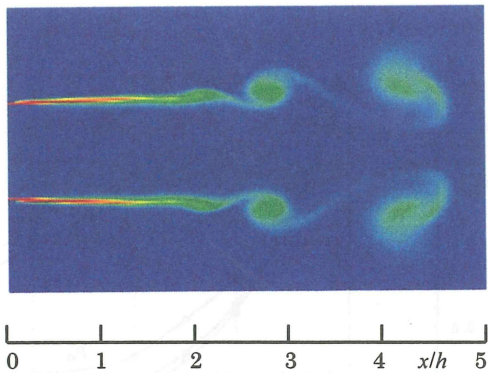


Fig.8 Vorticity distribution ( $\phi = 1.893$ )

## 4. 考察

### 4.1 噴流構造

数値計算によって得られた流れの可視化画像および噴流中心軸上の圧力分布から、本研究で対象とした比較的低い圧力比における二次元音速噴流の構造を、図9のようにモデル化した。上図の青い実線は膨張波、赤い破線は圧縮波を示している。ノズル出口 a から発生するプラントルメイヤー膨張波は噴流境界で反射し、それによって形成した圧縮波は噴流境界上の点 b で収斂する。点 b は噴流境界上のくびれとなって噴流にセルを形成する。圧縮波が点 b で再び反射し、膨張波となって同様の減少を繰り返す。膨張波領域では圧力が減少し、圧縮波領域では増加する。その結果、噴流中心軸上にあつては下図のように、圧力や密度の振動が発生する。以下の考察において、周期的変動における圧力の極大値を  $p_{e1}$ 、 $p_{e2}$ 、 $p_{e3}$ 、極小値を  $p_{c1}$ 、 $p_{c2}$ 、 $p_{c3}$  とする。また、ノズル出口を原点とし、第1セル、第2セル、第3セル終端の座標を  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  とし、セル長さを  $L_c$  で表す。

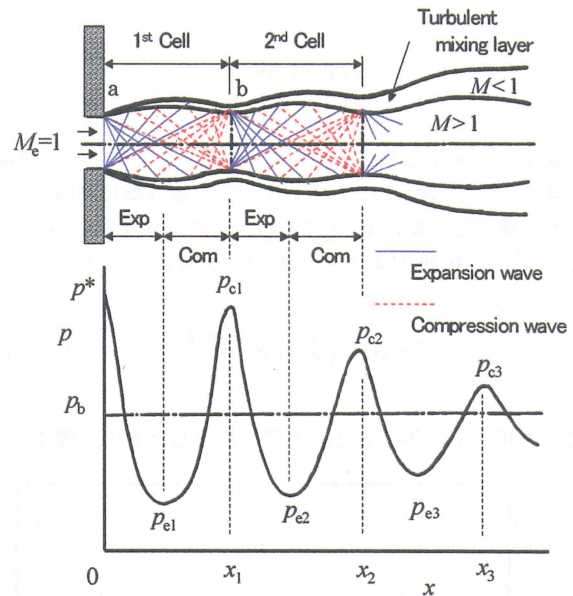


Fig.9 Schematic explanation of two-dimensional sonic jet

### 4.2 圧力変動の周期と振幅

図10は中心軸上の圧力分布から圧力変動の極大、極小値  $p_{e1}$ 、 $p_{c1}$ 、 $p_{e2}$ 、 $p_{c2}$ 、 $p_{e3}$ 、 $p_{c3}$  を発生する位置がどのように変化するか、 $\phi$  をパラメータにして示している。 $n=1, 2, 3, \dots$  は順に図9の  $e1, c1, e2, c2, e3, c3$  に対応している。

図より  $\phi$  一定に対して、それぞれ直線で示されることから、 $e1(n=1), c1(n=2), e2, c2, e3, c3(n=6)$  は等間隔に存在すること、また、その間隔は  $\phi$  の増加とともに大きくなるのがわかる。

$\phi$  に対するそれぞれの直線の傾きの逆数から  $(x/h)/n$  の値を求め、 $\xi$  で定義する。すなわち、 $\xi$  は無次元したピーク間距離  $(\Delta x/h)_{\text{peak-peak}}$  の値を表している。この値を用いて、

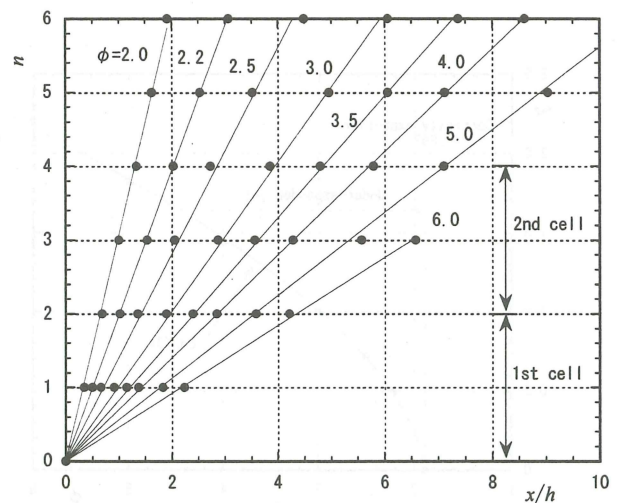


Fig.10 Locations of maximum and minimum pressure ( $n=1,3,5$ , minimum;  $n=2,4,6$ , maximum)

$\xi$  を  $\phi$  の関数として、次の形で定式化することを考える。

$$\xi = \alpha(\phi - 1.893)^\beta \quad (2)$$

定数  $\alpha$  と  $\beta$  の値を求めるために、両対数グラフ上に  $\xi$  の値をプロットする。図 11 に示すように  $\xi$  の値は概ね直線となり、この直線のこう配は 0.58 である。この結果を用いることによって、 $\alpha=0.95$  が求まり、式(2)は次のようになる。

$$\xi = 0.95(\phi - 1.893)^{0.58} \quad (3)$$

式(3)を用いて、再び  $\phi$  と  $\xi$  の関係を示したものが図 12 であ

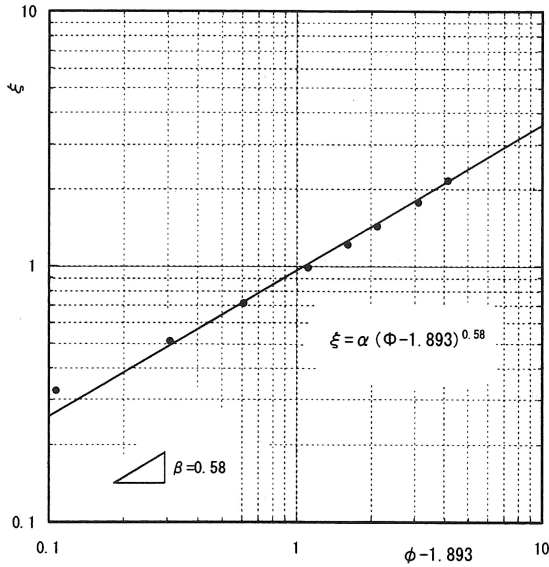


Fig.11 Determination of function  $\xi$

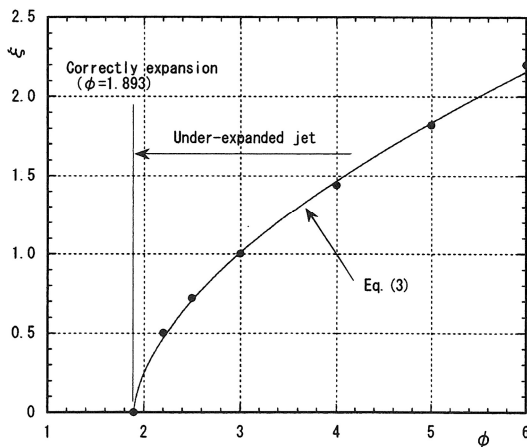


Fig.12 Relationship between  $\xi(\phi)$  and  $\phi$

る。図の丸印は数値計算結果、曲線は式(3)を表しており、両者はよく一致している。なお、式(3)は適正膨張の圧力比 1.893 において、 $\xi=0$  となるようにしている。

式(3)を用いれば、図 10 に示される  $\phi$  における  $n=1, 2, 3, \dots$  のピーク点位置  $x_n/h$  は式(4)で表すことができる。

$$\frac{x_n}{h} = n\xi = 0.95n(\phi - 1.893)^{0.58} \quad (4)$$

図 13 および図 14 は図 9 に示す圧力変動の極大、極小値  $p_{e1}$ 、 $p_{e2}$ 、 $p_{e3}$ 、 $p_{c1}$ 、 $p_{c2}$ 、 $p_{c3}$  の値が圧力比  $\phi$  によってどのように変化するかを示したものである。図 13 は出口圧力  $p^*$ 、図 14 は背圧  $p_b$  でそれぞれ無次元化されている。参考のため、図には貯気圧  $p_0$ 、出口圧力  $p^*(=0.5283p_0)$  および背圧を太い鎖線で記入している。図より計算の範囲内では圧縮波による

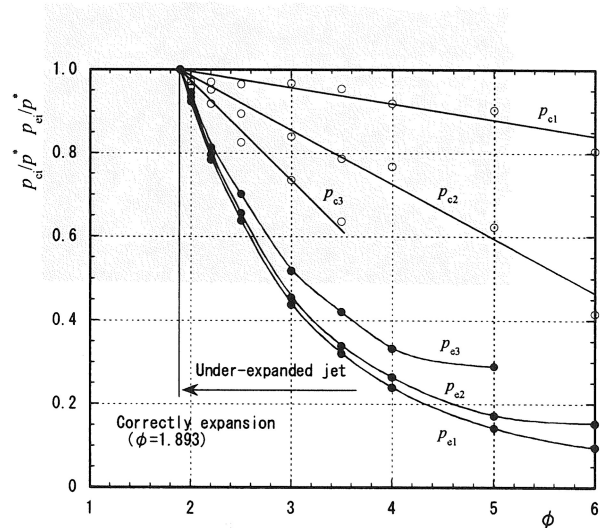


Fig.13 Magnitude of pressure fluctuation normalized by  $p^*$

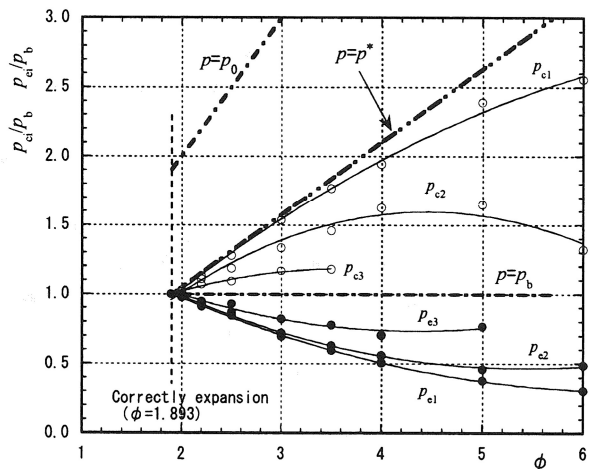


Fig.14 Magnitude of pressure fluctuation normalized by  $p_b$

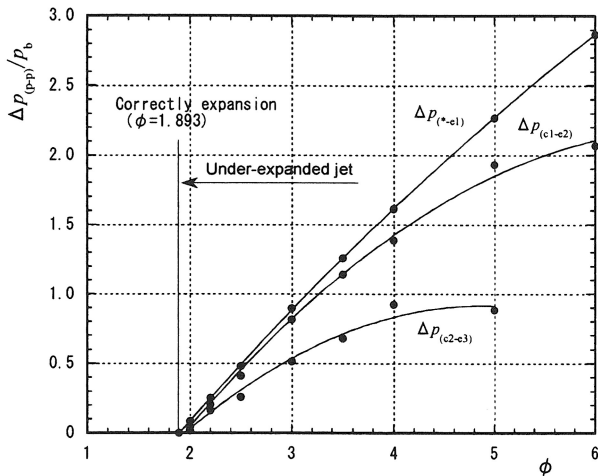


Fig.15 Pressure decrease  $\Delta p_{(c-c)}$  by expansion waves

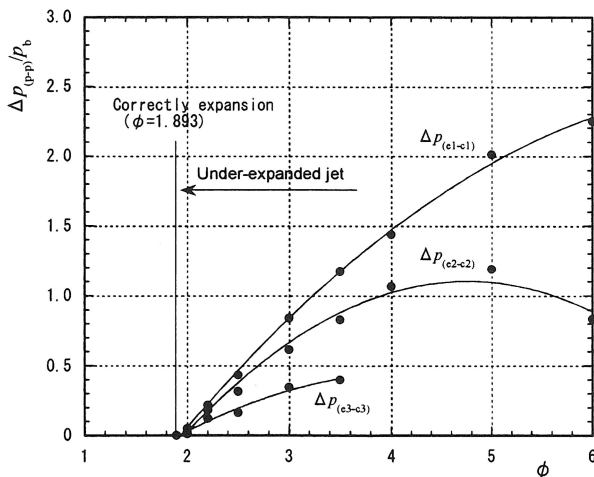


Fig.16 Pressure increase  $\Delta p_{(c-c)}$  by compression waves

極大値  $p_c$  は  $p^* > p_c > p_b$ 、膨張波による極小値  $p_e$  は  $p_e < p_b$  であることがわかる。

図 15 は膨張波による圧力の降下  $\Delta p$  の無次元量を圧力比  $\phi$  に対して示している。図中の  $\Delta p_{(e1-e1)}$  等は図 9 に示すようにノズル出口 \* から点 e1 までの圧力差  $p^* - p_{e1}$ 、同様に c1-e2 は点 c1 から点 e2 までの圧力差  $p_{c1} - p_{e2}$  を表している。

図 16 は同様に、圧縮波による圧力の上昇  $\Delta p$  の無次元量を示している。

### 4. 3 セル長さ

図 17 は第 1セル、第 2セル、第 3セルのセル長さを示すために、ノズル出口から各セル終端までの長さ  $x_1, x_2, x_3$  を圧力比  $\phi$  に対して示している。各曲線は丸印で示される計算点を適正膨張圧力比  $\phi = 1.893$  で  $x/h = 0$  を通る曲線で結んだ

ものである。この図を用いることによって、圧力比  $\phi$  が与えられた二次元噴流について、セルの終端位置を見積もることができる。図中には  $\phi = 3.8$  における Krothapalli の実験結果<sup>(1)</sup>から得られる第 1セルと第 2セルの位置を○で記入しており、計算結果の妥当性が明らかである。

図 18 は第 1セルについて、セル長さ  $L_c/h$  を示したものである。黒丸印は本研究による数値計算結果を示したものである。実線で示した曲線は式 (4) に基づくものである。すなわち、第 1セルの長さは式 (4) において、 $n=2$  を代入した次式で与えられる。

$$\frac{L_c}{h} = 1.9(\phi - 1.893)^{0.58} \quad (5)$$

破線は Tam<sup>(2)</sup>によって得られた二次元噴流に対する次式の計算結果である。

$$\frac{L_c}{h} = \frac{2(M_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \left\{ 2 + (\kappa - 1)M_j^2 \right\}^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}{M_j^2 (\kappa + 1)} \quad (6)$$

$$M_j^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \left\{ \left( \frac{p_0}{p_b} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right\}$$

いずれのデータもよく一致しており、式 (4) で示される曲線が妥当であるといえる。参考のため、図中には前述の Krothapalli の実験結果<sup>(1)</sup>を▲、また、第 2および第 3セルに関する本数値計算結果を○と□の白印、で記入している。参考のため、図中には次式で表される、軸対称噴流のセル長さの結果<sup>(18)</sup>も併記している。

$$\frac{L_c}{d} = 0.89(\phi - 1.9)^{0.5} \quad (7)$$

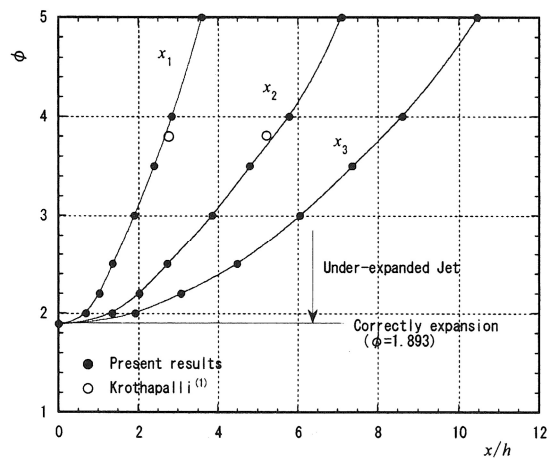


Fig.17 Relationship between pressure ratio  $\phi$  and non-dimensional distance  $x_i/h$  ( $i=1,2,3$ )

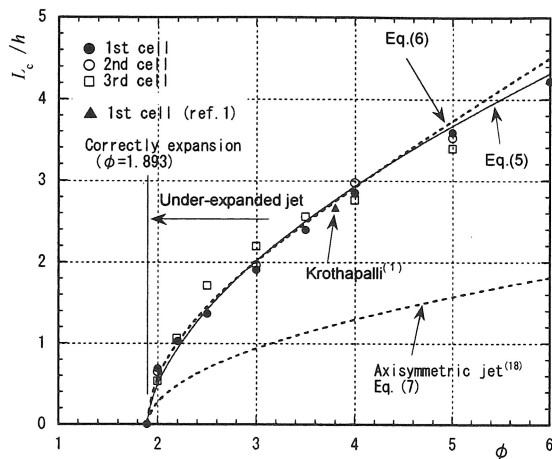


Fig.18 Cell length of two-dimensional sonic jet

ただし、 $d$ は軸対称ノズルの内径である。図より、二次元音速噴流の場合のセル長さは、例えば、圧力比 $\phi=6$ では軸対称噴流の場合の約2.5倍であることがわかる。

## 5. 結 論

二次元音速ノズルからの乱流噴流について圧力比1.893から6の間で数値計算を行い、噴流の内部構造とセル長さに着目して考察を行った。

得られた結果を要約すると、以下の通りである。

- (1) 密度分布の計算値より3種類のコンピュータシュリーレン画像を作製し、流れ場の可視化実験から得られる画像との比較を可能とした。
- (2) 圧力比の増加による適正膨張からショックセル構造への流れ場の発達過程を示した。
- (3) 二次元音速噴流の流れモデルを構築し、中心軸上の圧力分布との関連を示した。
- (4) 膨張波と圧縮波による圧力の極大と極小が、噴流の中心軸上でほぼ等間隔で第3セルまで周期的に出現すること、周期は圧力比の増加と共に増大することが明らかとなった。
- (5) 密度と圧力の極大と極小位置に関する圧力比との関係を定式化して、式(4)で示した。
- (6) 圧力振動の極大値、極小値、振幅を図13、図14、図15、図16で示した。
- (7) セル長さに関する定式化を行い、その結果を式(5)で示した。

## 参 考 文 献

- (1) A.Krothapalli, et.al., The Role of Screech Tones in Mixing of an Underexpanded Rectangular Jet, J. of Sound and

Vibration, No.160(1), (1986), p.119-143.

- (2) C.K.W.Tam, The Shock-Cell Structures and Screech Tone Frequencies of Rectangular and Non-Axisymmetric Supersonic Jets, J. of Sound Vibration, No.121(1), (1988), p.135-147.
- (3) 武石・青木、連続溶融めっきガスワイピングジェットの特長、鉄と鋼、81巻、2号(1995)、p.47-52.
- (4) D.Lacanette, et.al., Numerical Simulation of Gas-Jet Wiping in Steel Strip Galvanizing Process, ISIJ International, Vol.45, No.2 (2005), p.214-220.
- (5) E.Gutmark, et.al., Near Acoustic Field and Shock Structure of Rectangular Supersonic Jets, AIAA J., Vol.28, No.7(1990), p.1163-1170.
- (6) S.Beltaos, et.al., Plane Turbulent Impinging Jets, J. of Hydraulic Research, Vol.11, No.3(1973), p.29-59.
- (7) 例えば、保原、膨張流の諸問題、日本航空宇宙学会誌、第20巻、第224号(1972)、p.490-501.
- (8) S.M.Dash, D.E.Wolf, J.M.Seiner, Analysis of Turbulent Undeexpanded Jets, Part I : Parabolized Navier-Stokes Model, SCIPVIS, AIAA J., Vol.23, No.4(1985), p.505-514.
- (9) C-Y Kuo, A.P.Doelink, Oscillations of a moderately underexpanded choked jet impinging upon a flat plate, J. Fluid Mech., Vol.315 (1996), p.267-291.
- (10) Y.Otobe, H.Kashimura et.al., Influence of Nozzle Geometry on the Near-Field Structure of Highly Underexpanded Sonic Jet, Journal of Fluids and Structure, Vol.24, No.2 (2008), p.281-293
- (11) D.C.Pack, On the Formation of Shock-Waves in Supersonic Gas Jets (Two-Dimensional Flow), Quar. J. Mach. Appl.Mathe., 1, Part1(1948),p.1-7.
- (12) R.T.Driftmyer, A Correlation of Freejet Data, AIAA J., Vol.10, No.8(1972), p.1093-1095.
- (13) 例えば、J.D.Anderson,Jr., Computational Fluids Dynamics, McGraw-Hill,Inc., (1995), p.450-452.
- (14) S.Sarkar, G.Erlebacher, M.Y.Hussaini H.O.Kreiss, The Analysis and Modeling of Dilatational Terms in Compressible Turbulence, J. Fluid Mech.Vol.227(1991), p.473-493.
- (15) 樫村・片野田・松尾、 $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた適正膨張超音速噴流の数値解析(第1報、数値解析法の検証)、北九州工業高等専門学校研究報告、第39号(平成18)、p.75-81.
- (16) H.C.Yee, Upwind and Symmetric Shock Capturing Schemes, NASA TM-89464(1987),p.1-127.
- (17) 樫村、コンピュータグラフィックスによる衝撃波伝播の可視化、北九州工業高等専門学校研究報告、第23号(平成2)、p.141-146.
- (18) Shih-I P., Fluid Dynamics of Jets, D.Van Nostrand Company Inc., (1954), p.45.

(2008年9月29日 受理)