

三楕円孔あるいは三亀裂を有する異方性弾性材料の面内せん断解析

種 健・佐々木 徹*・内田 武

In-plane Shear Analysis for Anisotropic Elastic Medium with Three Elliptical Holes or Cracks

Takeshi TANE, Toru SASAKI and Takeshi UCHIDA

Abstract

Since used amount of anisotropic materials such as CFRP and GFRP is increased in automobile, aerospace and other industry fields. In addition to aforementioned materials, there are a lot of anisotropic materials such as 3D-printed materials, rock material, lumber and so on. Elastic parameters for these materials have been recently evaluated with sufficient accuracy. Therefore, stress and displacement distributions for anisotropic matrix with multi-holes or stress intensity factors (SIFs) for matrix with multi-straight cracks, with respect to in-plane shear loading in this paper. In particular, SIFs for single straight crack in orthotropic matrix under uniform stress at infinity are obtained by Sih et al., and concluded that there is no effect anisotropy on SIFs for each fracture mode. In previous paper, similar analysis for anisotropic medium with two elliptical holes or cracks, which subjected to in-plane shear loadings at infinity, is shown and several numerical examples are given by graphical representations and contour plot for stress components. It is cleared that the efficiency of material anisotropy to SIFs is appeared when the cracks approached each other. Then the solution expanded these two boundaries to three boundary cases.

Keywords : Anisotropy, Three Elliptical Holes, In-plane Shear, Stress Intensity Factor, Two-dimensional Elastic Theory

1. 緒言

CFRPやCFRTP等の複合材料は航空宇宙、自動車、またその他様々な産業分野への適用拡大が続いている。これらの材料は比強度に優れる反面、変形特性には力学的異方性を示すものもある。また、熱溶解積層法をはじめとする三次元造形技術の普及には目覚ましいものがあるが、造形品は同じく力学的異方性を示す場合があり、ABSやPC造形試験片の力学定数の報告例もある⁽¹⁾。

このような状況下、現在ではCAEが普及し、材料異方性を考慮した応力・変位解析も身近になった。しかし、FEM等の数値解析手法においては解析結果の妥当性の担保が常に問題となることから、そのための基本解としての位置付けを持つものの一つに、二次元弾性理論に基づく様々な問題の解がある。

最も基本的な問題としては面内および面外せん断の無限遠一様荷重を受ける一孔材の解析が挙げられる、このうち、直交異方性の一楕円孔材、また、直線亀裂先端における応力拡大係数解析をSihらが⁽²⁾行い、材料異方性が各破壊モードの応力拡大係数に及ぼす影響等について検討している⁽³⁾。その中では、単一の亀裂であれば応力拡大係数への材料異方性の影響は及ばないことが明確に示されている。

そこで、著者らは二楕円孔材あるいは二亀裂材について、直交異方性を特別な場合として包含する最も一般的な異方性弾性解を導出して計算例を示した⁽⁴⁾。その中で、複数欠陥による相互影響について検討した結果、その計算では応力拡大係数に材料異方性の影響は現れなかった。しかしながら、実材料にはより多くの欠陥が複数存在するのが普通であり、これらが互いに複雑に影響を及ぼしながら破壊に至ることを考えると、欠陥数を増やしての検討も重要であると考えられる。

そこで、本論文では先の成果を三楕円孔または三亀裂材へと拡張した場合の解を示し、数値計算例を示しておくものである。ここでは無限遠一様荷重として面内せん断応力を考慮し、破壊モードIIIはもちろん、構成方程式の連成効果に伴い発生する破壊モードIIの応力拡大係数も示す。

* 長岡工業高等専門学校機械工学科

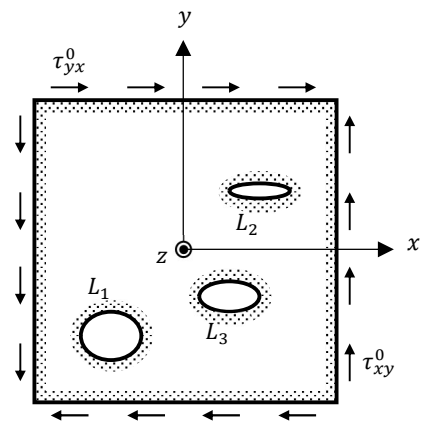


図1 解析モデル.

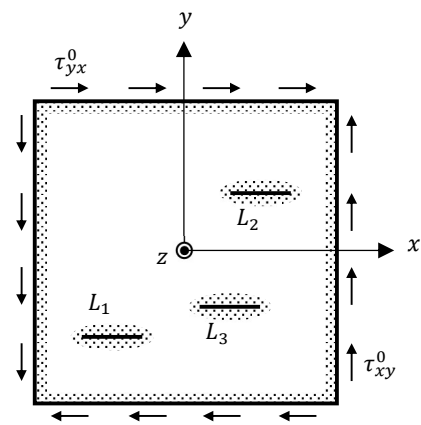


図2 三亀裂を有する場合

2. 基礎方程式

2.1 問題設定

図1のように、楕円孔 L_j ($j = 1, 2, 3$)を有する一般的な異方性弾性材料があり、欠陥群の配置寸法に比べ十分遠方より面内のせん断負荷 τ_{xy}^0 が作用する場合を考える。

楕円孔 L_j の長軸と短軸は任意に設けられた $x-y$ 座標系の x 軸もしくは y 軸に一致していて、 x 軸方向の半軸を a_j 、 y 軸方向の半軸を b_j 、 L_j の中心座標 $(x, y) = (x_j, y_j)$ と表す。そして、これら2軸に直交する紙面手前方向を z 軸として、二次元弾性理論の仮定に基づき、この方向に L_j の形状、また、応力・変位が変化しないと仮定する。

図2は楕円孔を直線亀裂にしたもので、図1の長短軸のいずれかを0として解析することができる(亀裂長さ $2c_j$ とする)。無論楕円孔と亀裂の複合的な解析も可能であることから、円孔と亀裂による相互影響についても本報内で評価する。

二次元問題における構成方程式は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

ここに、 a_{ij} は弾性コンプライアンスである。

2.2 複素応力関数

図3(1楕円孔材 L_3)の解析解に対し、仮想境界(破線)の無負荷境界条件を満たすように補正を施し決定する。図3の複素応力関数は次式によって与えられる。

$$\phi_k^*(z_k) = \Delta_k^* z_k + \sum_{n=0}^1 \Gamma_{kn}^* z_{k,3}^{-n}. \quad (2)$$

Δ_k^* , Γ_{kn}^* は一樣荷重 τ_{xy}^0 、 L_3 の長短軸 a_3, b_3 と中心座標 (x_3, y_3) より決定される。

図4は L_1 に対する最初の補正の様子を示し、図3の L_1 の合力を逆向きにして作用させている($P_{x,1}^{<1>}, P_{y,1}^{<1>}, P_{z,1}^{<1>}$)。図3と図4の合力を重ね合わせると L_1 の無負荷境界条件は満足されるが、 L_2 と L_3 の条件は満たされないから、両境界にも図4に準ずる補正モデルを導入して補正を繰り返す。全ての境界について補正を繰り返し行うと無負荷境界条件を満足するにいたる(拘束解除法)。ここでは、収束計算の繰返し回数を M_c として、近似的に図1の解を求める。

補正モデルの複素応力関数は、遠方における収束性を考慮して負べき無限級数で仮定されるものの、十分大きな項数 N_c で収束することからこれを次式のように表す。

$$\phi_{k,j}^{<m>}(z_k) = \sum_{n=0}^{N_c} \Gamma_{kn,j}^{<m>} z_{k,j}^{-n}. \quad (3)$$

ここに、 $z_{k,j} = x_j + \mu_k y_j$ として $\zeta_{k,j}$ を次式で決定する。

$$\left. \begin{aligned} z_k - z_{k,j} &= R_{k,j} \left(\zeta_{k,j} + \frac{m_{k,j}}{\zeta_{k,j}} \right), \\ R_{k,j} &= \frac{a_j - i\mu_k b_j}{2}, \quad m_{k,j} = \frac{a_j + i\mu_k b_j}{a_j - i\mu_k b_j}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\Gamma_{kn,j}^{<m>}$ は L_j の m 回目補正の際の複素定数で、 $P_{x,j}^{<m>}, P_{y,j}^{<m>}, P_{z,j}^{<m>}$ を複素フーリエ級数展開して決定される。

以上より、図1の複素応力関数は次式で与えることができる。

$$\phi_k(z_k) = \phi_k^*(z_k) + \sum_{j=1}^3 \phi_{k,j}(z_k). \quad (5)$$

ここに、

$$\phi_{k,j}(z_k) = \sum_{m=1}^{M_c} \phi_{k,j}^{<m>}(z_k) = \sum_{n=0}^{N_c} \Gamma_{kn,j}^{<m>} z_{k,j}^{-n}. \quad (6)$$

$$\Gamma_{kn,j} = \sum_{m=1}^{M_c} \Gamma_{kn,j}^{<m>}. \quad (7)$$

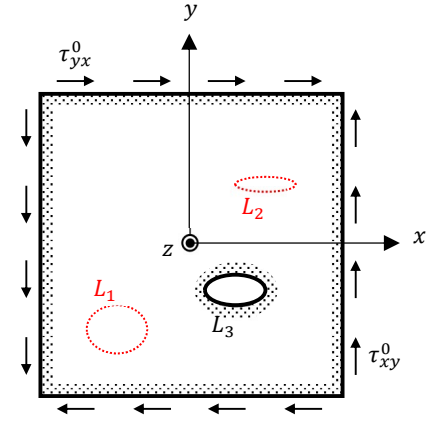


図3 1楕円孔モデル。

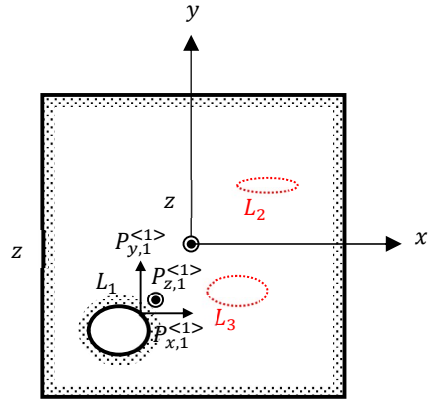


図4 L_1 の補正モデル。

2.3 合力、応力、変位および応力拡大係数を求める公式

複素応力関数により、図1の合力、応力、変位は次式によって求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \pm P_x &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k(z_k), \\ \pm P_y &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k(z_k), \\ \pm P_z &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k(z_k), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \phi_k'(z_k), \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k'(z_k), \\ \tau_{yz} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k'(z_k), \\ \tau_{xz} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \lambda_k \phi_k'(z_k), \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k'(z_k), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k p_k \phi_k(z_k), \\ v &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(z_k), \\ w &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

また、図2の亀裂 L_j 右側先端における各破壊モードの応力拡大

大係数は、 $\phi_{k,j}(z_k) \rightarrow \phi_{k,j}(\zeta_{k,j})$ と表示し直して、 $\phi_{k,j}^I(\zeta_{k,j}) = d\phi_{k,j}(\zeta_{k,j})/d\zeta_{k,j}$ を定義すると次式で求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} K_{I,j} &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{c_j}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_{k,j}^I(+1), \\ K_{II,j} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_j}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_{k,j}^I(+1), \\ K_{III,j} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_j}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_{k,j}^I(+1). \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{I,3} &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{c_3}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\phi_k^{*I}(+1) + \phi_{k,2}^I(+1)\}, \\ K_{II,3} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_3}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \{\phi_k^{*I}(+1) + \phi_{k,2}^I(+1)\}, \\ K_{III,3} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_3}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \{\phi_k^{*I}(+1) + \phi_{k,2}^I(+1)\}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. 数値計算例

以下の縦弾性係数およびポアソン比を有する直交異方性弾性材料について検討を行う。

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} &= 0.200, \quad \frac{E_3}{E_1} = 1.000, \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{32} = 0.25. \end{aligned} \right\}$$

横弾性係数は、次式で評価されると仮定する。

$$\frac{1}{G_{ij}} = \frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} + \frac{1}{2E_i}.$$

弾性主軸と図1あるいは図2に示す座標軸との関係は、

$$E_1 = E_x, \quad E_2 = E_y, \quad E_3 = E_z.$$

を基準として、これら弾性主軸が x 軸まわりに α 回転した場合の計算例を示す($\alpha = 0$ で直交異方性、 $\alpha = \pi/2$ で横等方性)。

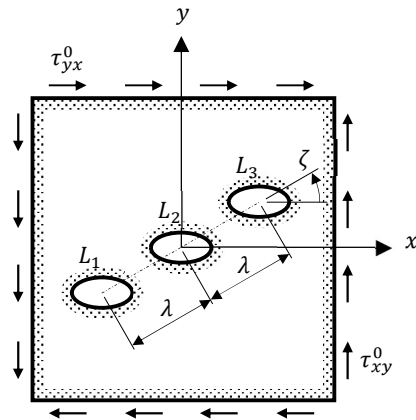


図5 等径3楕円孔材のせん断。

3.1 同形3楕円孔材のせん断

図5のように、長軸 a 、短軸 b の等しい3楕円孔が x 軸と ζ の角度をなして等間隔 λ で存在する際の応力分布に着目する。

図6(a)は偏平率 $f = b/a = 0.5$ の楕円孔が $\zeta = \pi/6$ 、 $\lambda/a = 3.0$ で存在するときのせん断応力分布図で、弾性主軸の傾

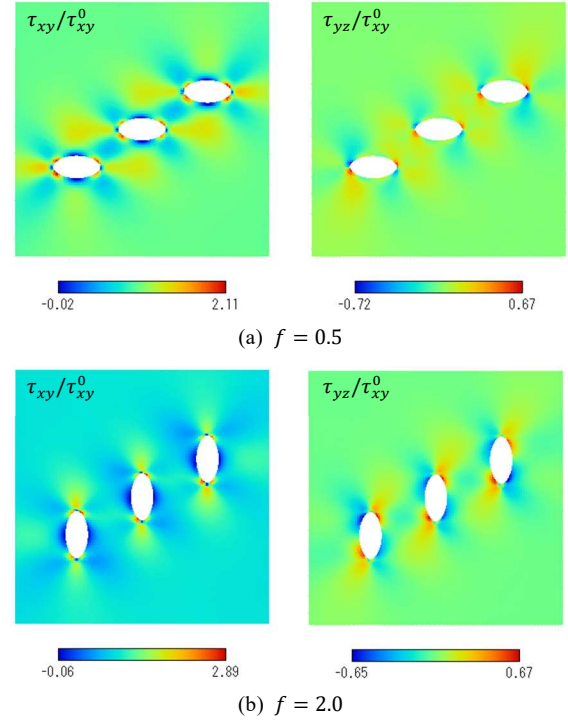


図6 $\lambda/\max[a, b] = 3, \alpha = \pi/4, \zeta = \pi/6$ の応力分布

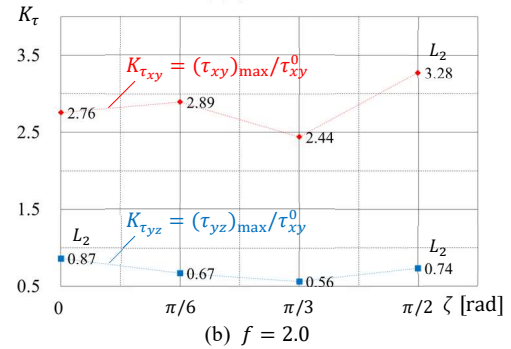
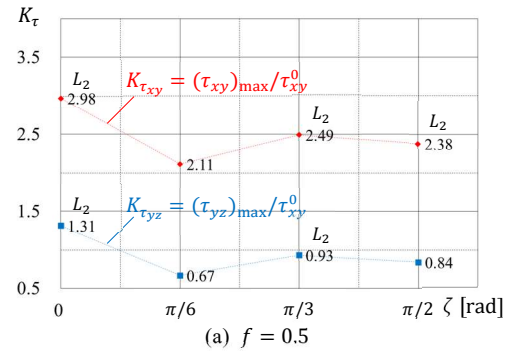


図7 $\lambda/\max[a, b] = 3, \alpha = \pi/4$ の応力集中係数

斜は $\alpha = \pi/4$ である。また、図6(b)は楕円孔を $\pi/2$ 回転させた $f = 2.0$ の分布図を示す。いずれも右側は連成効果により生じた面外せん断応力 τ_{yz}/τ_{xy}^0 の分布を示すが、どちらの場合でも作用荷重比70.0%前後の連成効果を確認できる。ただし、 $f = 2.0$ では濃淡の広がりからより広範囲に面外せん断の影響が広がっているといえる。

また、今回の楕円孔の条件では、面内せん断応力 τ_{xy}/τ_{xy}^0 は $f = 2.0$ において高い応力集中が認められた。 $f = 0.5$ を基準に考えると、約37.0%の増加となっている。

図7は3楕円孔群の傾斜角を $\zeta = 0$ から $\pi/2$ まで $\pi/6$ ずつ変化させ、面内せん断応力 τ_{xy} 、面外せん断応力 τ_{yz} 、双方の応力集中係数の変動の様子を示す（図6は $\zeta = \pi/6$ ）。

図7には各点の値を示してあるが、図5に示す中央境界 L_2 で最大値が生じた場合はその旨を記載している。図6より明らかに最大値が長短軸位置から離れた場所で生じるため、傾斜角 ζ に対して複雑な変動を示す。

3.2 等長3亀裂材の応力拡大係数

図2に示す3亀裂が図5に準じた角度 ζ 、間隔 λ で存在する場合について、式(11)より L_2 亀裂右側先端の応力拡大係数 $K_{II,2}$ 、 $K_{III,2}$ を1亀裂材の応力拡大係数（ $K_{II} = \tau_{xy}^0/\sqrt{\pi c}$ ）で正規化して表1に示す。弾性主軸の傾斜は $\alpha = \pi/4, \pi/2$ （横等方性）である。

表1(a)は $\zeta = 0$ 、すなわち、 x 軸上に3亀裂が並んで存在する場合で、亀裂が近接した状態では正規化力拡大係数 $K_{II,2}/K_{II}$ は大きい、亀裂が離れるにつれて1亀裂材の結果に収束することを示す。しかし、材料異方性の影響はなく、横等方性と同じ数値を得た。

また、一般に面外せん断問題との連成を起こす $\alpha = \pi/4$ において、 $K_{III,2}/K_{II}$ は常に0で、この配置では連成しないことが分かった。これらの傾向は、二亀裂を対象とした前報と同様である。

表1 正規化応力拡大係数の計算例

(a) $\zeta = 0$

$\lambda/2c$	$K_{II,2}/K_{II}$		$K_{III,2}/K_{II}$	
	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = \pi/4$
1.050	2.032	2.032	0.000	0.000
1.767	1.105	1.105	0.000	0.000
2.972	1.031	1.031	0.000	0.000
5.000	1.010	1.010	0.000	0.000

(b) $\zeta = \pi/4$

$\lambda/2c$	$K_{II,2}/K_{II}$		$K_{III,2}/K_{II}$	
	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = \pi/4$
1.050	0.981	0.971	0.000	0.065
1.767	0.965	0.949	0.000	0.032
2.972	0.982	0.975	0.000	0.012
5.000	0.993	0.990	0.000	0.004

表1(b)は $\zeta = \pi/4$ 、すなわち、 $y = x$ の直線上に3水平亀裂の中心が存在する場合である。この場合は、互いの亀裂の真横に亀裂がない状態であるため、亀裂近接の影響は小さく

現れたとみられ、 $K_{II,2}/K_{II}$ の変動は小さく、1亀裂材の結果とほぼ変わらないことが分かった。しかし、 $K_{II,2}/K_{II}$ の変動は $\alpha = \pi/2$ と $\alpha = \pi/4$ でわずかながら異なる挙動を呈し、材料異方性の影響が表れていると判断できる。

また、 $K_{III,2}/K_{II}$ について、 $\alpha = \pi/2$ （横等方性）では常に0で連成していないのに対し、 $\alpha = \pi/4$ では最大でも6.5%程度ではあるが連成することが分かった。

4. 結言

本論文では一般的な異方性弾性挙動を示す3楕円孔材の十分遠方から一様な面内せん断負荷を受ける場合についての解を誘導し、同形3楕円孔材の応力分布や応力集中係数、等長3亀裂材の応力拡大係数の計算例を示した。

3楕円孔材の応力集中係数の検討では、孔群が水平軸から傾斜した直線状に等間隔に配置された場合の検討を行った。縦長と横長の楕円孔群、それぞれについての検討を行い、面外せん断応力の連成を確認した。

3亀裂材の応力拡大係数についても同様な配置を仮定して検討した。水平に配置された3亀裂材では、亀裂近接の影響を受けてモードII応力拡大係数が大きくなったが、等方性と異方性による違いは現れず、とくに異方性では通常起こり得るモードIII応力拡大係数が発生しないことが分かった。

一方、水平亀裂群が傾斜直線上に配置されると亀裂近接の影響のみならず、材料異方性の影響でモードII応力拡大係数が変動することを確認した。また、モードIII応力拡大係数の連成を確認した。

最後に、本報は前報と同様に楕円孔の長短軸は水平もしくは鉛直方向に限定されており、今後は任意方向に長短軸を有する解の誘導が必要である。

参考文献

- (1) Jason, C., et al., Experimental characterization of the mechanical properties of 3D-printed ABS and polycarbonate parts, Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics, Vol. 3 (2016), pp 89–105.
- (2) Sih, G. C., Paris, G. C. and Irwin, G. R., On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, International Journal of Fracture Mechanics, No. 1 (1965), pp. 189–203.
- (3) 種健, 佐々木徹, 内田武, 面内せん断の無限遠一様荷重を受ける二楕円孔を有する異方性弾性体の解析, 北九州工業高等専門学校研究報告, Vol. 55 (2022), pp. 1–4.

(2022年11月 1日 受理)