

車両用熱交換器の性能評価における圧力損失の近似

島本 憲夫

An approximation of pressure loss on performance evaluation of heat exchangers for vehicles

Norio SHIMAMOTO

Abstract

We have estimated the performance of the heat exchangers for vehicles such as radiators or oil coolers. The shape of the fins and the arrangement of the tubes constituting the heat exchanger affect the amount of heat radiation and the pressure loss. The aim of this study is to derive an approximate expression of pressure loss by considering the flow of air passing through the radiator as a flow in the pipe. In this paper, we try to formulate the pipe friction factor by using the dimension analysis, and derive the approximate expression of the factor based on the experimental data.

Keywords : heat exchanger, radiator, pressure loss, fin pitch, tube pitch, pipe friction factor, dimension analysis

1. 緒言

1.1 研究の背景

近年、環境に配慮したエネルギー利用に対する要求が高まっている。その中で、自動車業界においても、二酸化炭素排出量や廃熱量の削減などの環境対策は重要な課題となっている。

これまで継続研究として、車両用の冷却機構である熱交換器（ラジエーターとオイルクーラー）について、より効率的で小型化を実現するための要件を探索すべく、風洞実験により熱交換器としての性能特性を測定する取り組みを行ってきた。この実験の中で得られた測定データを活用することで、簡易な近似式による熱交換器性能値の見積もり方法について検討を進めている。

1.2 これまでの継続研究

自動車などの車両エンジンの冷却では、車両の走行中、前面から取り込まれた空気が熱交換器の表面を流れることで、熱交換器の中を流れる高温となった循環液体を冷却する方式が多用されている。熱交換器は、循環液体が流れる管路と、その表面に設置されたフィンによって構成されている。この管路の配列や数量、またフィンの個数や形状などによって、放熱量の大きさと、熱交換器を通過する空気の流れやすさが異なってくる。従って、熱交換器の性能を向上させるためには、“放熱量の増大”と同時に“空気側の圧力損失の低減”を実現することが必要になるが、この二つの条件はトレードオフの関係にある。

継続研究では、管路配置やフィン形状などの形状条件の異なる仕様の熱交換器について、風洞実験装置を用いて擬似的な熱交換の環境をつくり、循環液体と空気についての温度や圧力、風速などのデータの測定を行っている。その結果から、熱交換器における放熱量と空気側の圧力損失を

算定し、熱交換機性能を実験的に分析している。この実験を通して、熱交換器の性能を左右する二つの要件が最適となるような、熱交換器を構成する形状条件を見つけ出すことを目指している。

1.3 本研究の目的

継続研究においては、性能測定実験によって得られた測定データは、別途進められている計算機シミュレーションでの計算モデルの構築や各種の計算パラメータの調整のために活用されている。このような、より正確な熱交換器の性能値を予測可能とするシミュレーションソフトの構築とあわせて、簡易的な近似式で熱交換器の性能値を見積もることができれば有用であると考えている。

本稿では、熱交換器の性能指標の一つである、ラジエータを通過する冷却用空気の圧力損失（空気側圧力損失）についての近似式を導出する検討を行った。ラジエータの前面から取り込まれた空気は、フィン形状の断面を持った管路を通り流れ出る。この流れの過程を管路流れとして近似し、次元解析の手法を用いて、これに相当する管摩擦係数を定式化する。これまでに実施してきたラジエータの性能測定実験の測定データから具体的な係数値を算出し、管摩擦係数の近似式の導出を試みる。

1.4 本稿で用いる主な記号

(記号)

RD	: ラジエータ
Q	: 放熱量 [kW] (換算放熱量も同じ)
Δp	: 空気側圧力損失 [Pa]
U	: 空気の風速 [m/s]
ρ	: 空気の密度 [kg/m ³]
μ	: 空気の粘性係数 [Pa·s]
CL	: コア厚 (熱交換器の厚さ) [m]

- TP : チューブピッチ (冷却用管の間の幅) [m]
 FP : フィンピッチ [m]
 FS : フィンの折り返し形状のタイプ (3種類)
 R : 半丸型 (Round type)
 S : 四角型 (Square type)
 T : 三角型 (Triangle type)
 LP : ルーバピッチ [m]
 θ : ルーバ角 [deg]
 $L\theta$: ルーバ迎長[m] ($=LP \times \tan\theta$)
 D_H : 等価直径[m]
 α : 放熱量 Q と風速 U との相関べき指数 [-]
 β : 圧力損失 Δp と風速 U との相関べき指数 [-]
 λ : 管摩擦係数 [-]

本稿で用いる記号は、参考文献(1)と対応するようにしている。

2. 空気側圧力損失の近似解析

2.1 空気側圧力損失の管路流れによる近似解析

これまで実施してきたラジエータの性能測定実験で得られた測定データの結果については、参考文献(1)にて報告した。その中で、換算放熱量と空気側圧力損失のそれぞれは、流速とべき乗の相関関係にあることを示した。つまり、 $Q \propto U^\alpha$ および、 $\Delta p \propto U^\beta$ の関係である。この結果をもとに、本稿では、次のようなアプローチで空気側圧力損失の近似解析を試みる。

- ラジエータを通過する空気の流れを、フィン形状の断面を持った非円形の管路の流れとして考え、代表寸法として等価直径を用いる。
- 圧力損失は、ダルシーワイスバッハの式に基づいて評価する。
- 圧力損失に次元解析の手法を適用して、ダルシーワイスバッハの式との対比から管摩擦係数を定式化する。
- 性能測定実験で得られた測定データから、 $\Delta p \propto U^\beta$ の関係における、流速 U のべき乗の指数 β を最小二乗法により求め、その結果から管摩擦係数の近似式を導出する。

2.2 管路内流れへの近似

ラジエータでは、チューブ表面に設置されたフィンの隙間を空気が通過することになる。この空気の流路であるフィン隙間を、管路の中の流れとして考え、管摩擦を伴う空気の圧力損失の問題とみなして考えることにする。

管路内を流れる流体の圧力損失は、ダルシーワイスバッハの式から見積もることができる。ラジエータの場合では、管径は非円形断面であるので等価直径 D_H が対応し、管の長さにはコア厚さ CL が対応する。

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{CL}{D_H} \cdot \frac{\rho U^2}{2}$$

(2.2.1)

本稿では、ラジエータを通過する流れの場合の、管摩擦係数 λ の近似式を求めていく。

(1)圧力損失に関する物理量

圧力損失に関する物理量としては、ラジエータを通過する空気の密度や粘性等の物性値、流速、ラジエータの幾何学的な条件であるチューブピッチ、フィンピッチ等の各部位の寸法がある。またフィン表面にはルーバが設けられている。ルーバは、流れに対して角 θ だけ傾斜していることにより、空気の取り込みが行われる。空気の取り込み面積は、 $LP \times \tan\theta$ に比例すると考えることができるから、これを一つの物理量として考えて、「 $L\theta$:ルーバ迎長」として一つの長さ次元を持った量にまとめることにする。実験用サンプルでは、設計仕様上、ルーバ角はすべて同じ角度で製造されている。

$$L\theta = LP \cdot \tan\theta$$

(2.2.2)

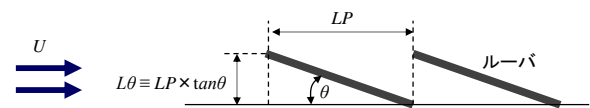


図2.2.1 ルーバ

以上から、本検討の次元解析においては、 Δp , U , ρ , μ , CL , FP , TP , $L\theta$, D_H の9つの物理量を考えることにする。

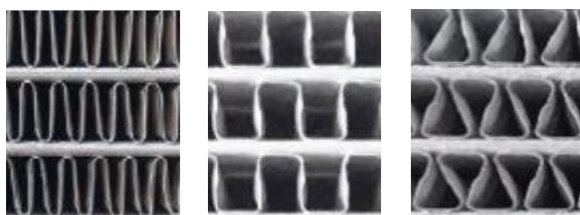
(2)等価直径の定式化

ラジエータを通過する空気の流路は、非円形の断面形状を持った管路となるため、管径の代表長さとしては等価直径を用いる。性能測定実験を行った実験用サンプルのラジエータでは、フィンの折り返し形状として、図2.2.2に示すような、「半丸型」、「四角型」、「三角型」の三つのタイプがある。

ここでは、それぞれのタイプについての等価直径を算出するための定式化を行っておく。

フィンの折り返し形状（流路の断面形状）について、丸型ではパラメータ w で、四角型ではパラメータ b によって、形状の特徴を示すものとした。（図2.2.3と図2.2.4を参照）

等価直径 D_H は、流路の断面積をぬれ縁長さ（流体が接する管路の周長）で除したものの4倍で定義される。半丸型、四角型および三角型の等価直径を次のように定式化する。



(a) R : 半丸型 (b) S : 四角型 (c) T : 三角型

図2.2.2 ラジエータのフィン形状

①半丸型の等価直径

$$D_H = \frac{2 \cdot FP \cdot TP}{\pi w + FP + 2\sqrt{(TP - w)^2 + (FP/2 - w)^2}} \quad (0 \leq w \leq FP/2) \quad (2.2.3)$$

②四角型の等価直径

$$D_H = \frac{2 \cdot FP \cdot TP}{FP + 2\sqrt{TP^2 + (FP/2 - b)^2}} \quad (0 \leq b \leq FP/2) \quad (2.2.4)$$

③三角型の等価直径

$$D_H = \frac{2 \cdot FP \cdot TP}{FP + 2\sqrt{TP^2 + (FP/2)^2}} \quad (2.2.5)$$

三角型は、①で $w=0$ 、あるいは②で $b=0$ の場合となる。

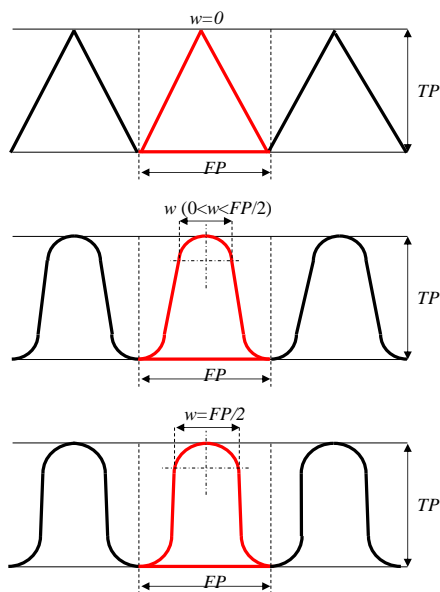


図2.2.3 フィンの折り返し形状：半丸型

2.3 圧力損失への次元解析の適用

(1)次元解析による圧力損失の定式化

ここでは次元解析の手法に基づき、圧力損失の定式化を行う。先に示した9つの物理量の中で、圧力損失 Δp を、残りの8つの物理量で表現する。8つの物理量に対応するべき指数をそれぞれ、 a, b, c, d, e, f, g, h として、圧力損失を各量のべき乗の項の積として、以下のようにおく。

$$\Delta p = K \cdot U^a \cdot \rho^b \cdot \mu^c \cdot CL^d \cdot FP^e \cdot TP^f \cdot L\theta^g \cdot D_H^h \quad (2.3.1)$$

ここで、 K は比例定数とする。質量、長さ、時間の次元を $[M]$, $[L]$, $[T]$ とすると、次元式は、

$$\frac{[M]}{[L][T]^2} = K \cdot \left(\frac{[L]}{[T]}\right)^a \cdot \left(\frac{[M]}{[L]^3}\right)^b \cdot \left(\frac{[M]}{[L][T]}\right)^c \cdot [L]^d \cdot [L]^e \cdot [L]^f \times [L]^g \cdot [L]^h \quad (2.3.2)$$

となり、 $[M][L][T]$ の各次元でのべき指数のつり合い式は、以下ようになる。

$$\begin{cases} [M] & 1 = b + c \\ [L] & -1 = a - 3b - c + d + e + f + g + h \\ [T] & -2 = -a - c \end{cases} \quad (2.3.3)$$

バッキンガムの π 定理から、未知のべき指数は5(=物理数8 - 次元数3)である。この関係式から、

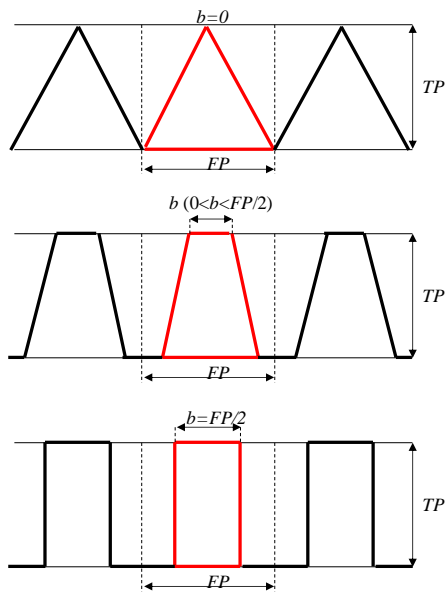


図2.2.4 フィンの折り返し形状：四角型

$$\begin{cases} a = 2 + d + e + f + g + h \\ b = 1 + d + e + f + g + h \\ c = -d - e - f - g - h \end{cases} \quad (2.3.4)$$

となり、これを式(2.3.1)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \Delta p &= K \cdot U^{2+d+e+f+g+h} \cdot \rho^{1+d+e+f+g+h} \cdot \mu^{-d-e-f-g-h} \\ &\quad \times CL^d \cdot FP^e \cdot TP^f \cdot L\theta^g \cdot D_H^h \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

さらに次のように式を変形する。

$$\begin{aligned} \Delta p &= K \cdot (\rho U^2) \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot CL}{\mu}\right)^d \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot FP}{\mu}\right)^e \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot TP}{\mu}\right)^f \\ &\quad \times \left(\frac{\rho \cdot U \cdot L\theta}{\mu}\right)^g \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^h \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

ここで、ラジエータ形状の各寸法を代表長さとして、以下のようなレイノルズ数を考える。

$$\begin{cases} Re(CL) = \frac{\rho \cdot U \cdot CL}{\mu} \\ Re(FP) = \frac{\rho \cdot U \cdot FP}{\mu} \\ Re(TP) = \frac{\rho \cdot U \cdot TP}{\mu} \\ Re(L\theta) = \frac{\rho \cdot U \cdot L\theta}{\mu} \\ Re(D_H) = \frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu} \end{cases} \quad (2.3.7)$$

これらを用いると、圧力損失は、ラジエータを構成する各部位の特徴長さのレイノルズ数の積の形で表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta p &= K \cdot (\rho U^2) \cdot \{Re(CL)\}^d \cdot \{Re(FP)\}^e \cdot \{Re(TP)\}^f \\ &\quad \times \{Re(L\theta)\}^g \cdot \{Re(D_H)\}^h \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

比例定数 K と5つのべき指数 d, e, f, g, h は、性能測定実験で得られた測定データを用いて算出することになる。

2.4 管摩擦係数の定式化

(1)管摩擦係数の式の導出

次元解析から導出した圧力損失の関係式(2.3.6)をダルシーワイスバッハの式(2.2.1)の形式に書き換えると次のよう

になる。

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2K \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot CL}{\mu}\right)^{d-1} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot FP}{\mu}\right)^e \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot TP}{\mu}\right)^f \\ &\quad \times \left(\frac{\rho \cdot U \cdot L\theta}{\mu}\right)^g \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{h+1} \cdot \left(\frac{CL}{D_H}\right) \cdot \frac{\rho U^2}{2} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

この中で管摩擦係数に相当する部分を抽出すると、

$$\begin{aligned} \lambda &= 2K \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot CL}{\mu}\right)^{d-1} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot FP}{\mu}\right)^e \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot TP}{\mu}\right)^f \\ &\quad \times \left(\frac{\rho \cdot U \cdot L\theta}{\mu}\right)^g \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{h+1} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

となる。ここで管摩擦係数の定式化を行うにあたって、次のような仮定をおく。

① 管路流れのレイノルズ数

管路流れにおける管摩擦係数は、流れの状態によって変化するものと考えられ、流れの状態を示す代表的な指標としてレイノルズ数がある。本問題でのレイノルズ数は、代表長さとして等価直径 D_H を用いた以下のものを考えることにする。

$$Re(D_H) = \frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}$$

② 管路断面のアスペクト比

管路流れでの流路断面形状は、圧力損失に大きく関係する。本問題では、その影響を管路断面のアスペクト比として取り入れることとし、 TP/FP をその因子として考える。

③ フィン表面のルーバ

実際のラジエータでは、フィン表面にルーバが設けられている。そのため、管路流れとして近似する場合には、管路内壁の表面を滑面として扱うことはできないが、本検討では、管路内壁の表面を滑面として扱うことで考えることにする。そのため、本検討では、ルーバに関係するべき指数は $g=0$ として扱うことにする。

以上の仮定を考慮すると、管摩擦係数は、

$$\lambda = 2K \cdot \left(\frac{TP}{FP}\right)^f \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{h+1} \quad (2.4.3)$$

となる。空気側圧力損失 Δp と流速 U には、 $\Delta p \propto U^\beta$ のべき乗の相関関係があるので、 Δp と U との比例関係は、

$$\Delta p = \left[2K \cdot \left(\frac{TP}{FP}\right)^f \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{h+1} \right] \cdot \frac{CL}{D_H} \cdot \frac{\rho U^2}{2} \propto U^\beta \quad (2.4.4)$$

であるから、 U の指数の関係を満たすためには、 $h+1+2=\beta$ となる必要がある。またアスペクト比の影響についても、流速との相関があるものとして $f=\beta$ と仮定する。従って、圧力損失の次元解析式における各べき指数は、 $d=1.0$ 、 $e=-\beta$ 、 $f=\beta$ 、 $g=0$ 、 $h=\beta-3$ のようにとることになる。これを次元解析式(2.3.6)にあてはめると、

$$\Delta p = K \cdot (\rho U^2) \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot CL}{\mu}\right)^1 \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot FP}{\mu}\right)^{-\beta} \times \left(\frac{\rho \cdot U \cdot TP}{\mu}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot L\theta}{\mu}\right)^0 \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{\beta-3} \tag{2.4.5}$$

また管摩擦係数は、次式のようになる。

$$\lambda = 2K \cdot \left(\frac{TP}{FP}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{\beta-2} \tag{2.4.6}$$

このときの比例定数 K と流速 U のべき指数 β は、性能測定実験から得られた測定データから算定する。

3. 実験データによる管摩擦係数の推定

3.1 性能測定実験の測定データ

前項で導出した管摩擦係数の式(2.4.6)について、風洞による性能測定実験で得られた測定データを用いて、比例定数 K と流速 U のべき指数 β を算出する。ここでは、半丸型フィン形状の実験用サンプルを対象にして算出を行う。

(1)性能測定実験での測定データ

対象とする半丸型のフィン形状を持つラジエータについての形状仕様を表3.1.1に示す。一覧に示した実験用サンプルについての、空気側圧力損失と流速との関係の測定結果をまとめたものを図3.1.1に示す。(実験用サンプルの番号は、参考文献(1)と対応している。)

表3.1.1 ラジエータ：実験用サンプルの形状仕様

Sample No.	CL [mm]	TP [mm]	FP [mm]	FS (R/S/T)
RD-01	36	9.6	3	R
RD-03	24	9.8	2.5	R
RD-04	27	9.6	2.5	R
RD-05	16	9.6	2.5	R
RD-06	16	9.8	2.5	R

(2)等価直径の算出

対象とする実験用サンプルについて、式(2.2.3)を用いて等価直径の計算を行った。また算出した等価直径に基づいて、式(2.3.7)により、レイノルズ数 $Re(D_H)$ を計算した。それらの結果を表3.1.2に示す。

表3.1.2 ラジエータ：等価直径 D_H とレイノルズ数 $Re(D_H)$

Sample No.	FS (R/T/S)	D_H [mm]	Reynolds number $Re(D_H)$			
			3[m/s]	5[m/s]	7[m/s]	9[m/s]
RD-01	R	1.99	395	658	921	1,185
RD-03	R	2.14	425	709	993	1,276
RD-04	R	2.14	424	707	990	1,272
RD-05	R	2.14	424	707	990	1,272
RD-06	R	2.14	425	709	993	1,276

3.2 管摩擦係数の近似式

(1)測定データによる定数値の算出

① べき指数 β の算出

空気側圧力損失 Δp と流速 U と関係において、 $\Delta p \propto U^\beta$ のべき指数 β を測定データにより算出する。対象とする実験用サンプルの測定で得られた風速と空気側圧力損失のデータセット($U_i, \Delta p_i$)から、最小二乗法に基づいてべき指数を算定すると、 $\beta=1.53$ が得られた。(最小二乗法による算出方法は、Appendix Aを参照)

② 比例定数 K の算出

次に、比例定数 K を測定データから算定する。圧力損失の次元解析式(2.4.5)を比例定数 K について解くと、

$$K = \frac{\Delta p}{\rho U^2} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot CL}{\mu}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot FP}{\mu}\right)^{\beta} \times \left(\frac{\rho \cdot U \cdot TP}{\mu}\right)^{-\beta} \cdot \left(\frac{\rho \cdot U \cdot D_H}{\mu}\right)^{-(\beta-3)} \tag{3.2.1}$$

U は設定の風速値(3,5,7,9 m/s)、 CL 、 FP 、 TP は各実験用サ

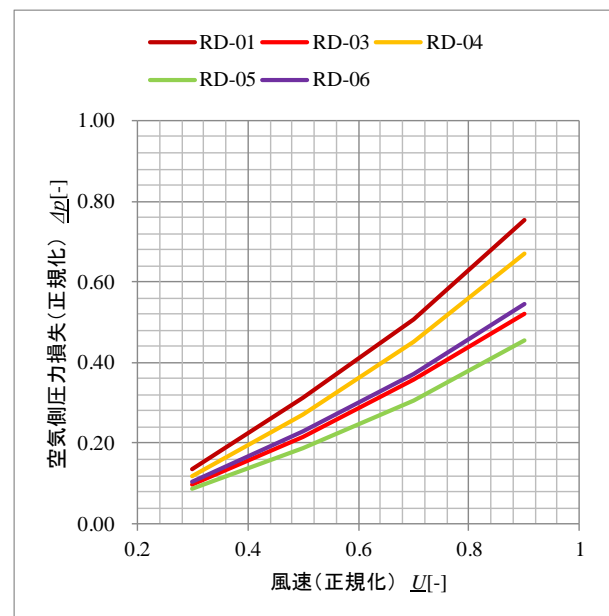


図3.1.1 空気側圧力損失の実験結果

ンプルの形状寸法であり、 D_H は各形状寸法から算出した値を用いる。また空気の物性値として、 $\rho=1.205[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 $\mu=1.822 \times 10^{-5}[\text{Pa} \cdot \text{s}]$ の値とした。これらの数値を用いて、各実験用サンプルの比例定数 K を計算した結果を、図3.2.1に示す。次元解析の手法に基づけば、各実験用サンプルで計算した比例定数 K は、理想的には一致することになるが、実験での測定誤差やラジエータのフィン形状の作製精度などの理由により、ばらつきが生じる。そのため、ここでは各実験用サンプルの比例定数 K の平均値をとり、それを比例定数 K として用いることにする。今回の測定データから得られた平均値は1.90であり、この値を比例定数 K とする。

(2)管摩擦係数の近似式

導出した管摩擦係数の式(2.4.6)に、測定データから算出した、 $K=1.90$ と $\beta=1.53$ を代入すると、管摩擦係数の近似式は次のように得られる。

$$\lambda = 3.80 \cdot \{Re(D_H)\}^{-0.47} \cdot \left(\frac{TP}{FP}\right)^{1.53} \quad (3.2.2)$$

4. 結言

これまで、車両用の熱交換器(ラジエータとオイルクーラ)の性能を測定するため、形状条件の異なる実験用サンプルを用いて、風速に対する放熱量と冷却用空気の圧力損失の変化を測定する実験を継続的に行ってきた。この実験によって得られた測定データを活用して、簡易的な近似式で熱交換器の性能値を見積もる方法についての検討を進めている。その中で、熱交換器の性能指標の一つである、ラジエータを

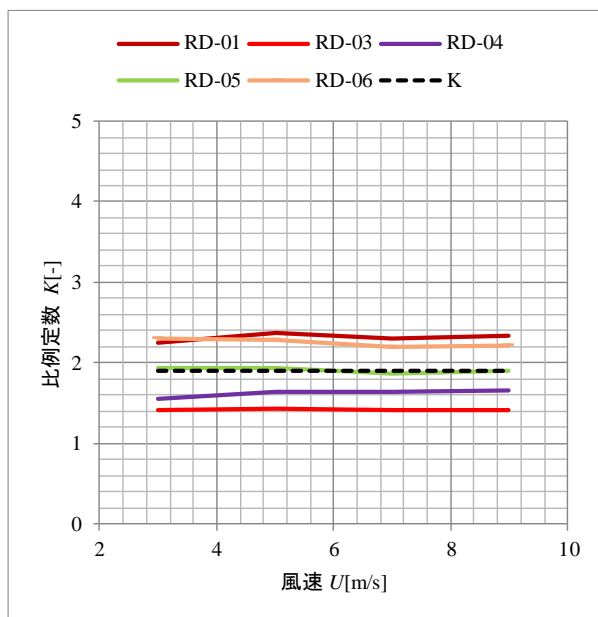


図3.2.1 比例定数 K の算定

通過する冷却用空気の圧力損失についての近似式の導出を試みた。本稿では、ラジエータを通過する空気の流れを、フィン形状の断面を持った管路の流れとして考え、ダルシーワイスバッハの式に基づいて、次元解析の手法により管摩擦係数の定式化を行った。ラジエータの性能測定実験の測定データを用いて具体的な係数値を算定し、管摩擦係数の近似式を導出した。

本稿では、半丸型フィンの場合のみを対象として行ったが、今後、他の形状も含めたデータでの検証を行っていく予定である。また今回の検討で示した管路流れの近似では、管路内壁の表面は滑面として扱ったが、実際のラジエータでは、フィン表面にルーバがあり、粗面として扱う必要がある。ルーバは空気の流れ場に大きく関係するため、圧力損失を見積もる場合にルーバの因子を取り込んでいく必要がある。これについても今後の検討課題としたい。

謝辞

本稿で使用した実験データは、大和ラヂエーター工業株式会社との共同研究の中で実施した性能評価実験で得られたものです。本共同研究の関係メンバであります、大和ラヂエーター工業株式会社 中村正樹氏、永見昌之氏、橋本知明氏、榎辰明氏、九州工業大学 徳田君代氏、清水文雄氏、島根県産業技術センター 福田健一氏、小笠原 聡氏に感謝いたします。北九州工業高等専門学校において本研究の立ち上げ時から実施に携わって頂いた 塚本 寛氏(前学校長)、中山博愛氏、小清水孝夫氏、中村繁樹氏、在学時に卒業研究および特別研究にて測定実験に携わって頂いた、榮田祐樹氏(現在 TOTO 株式会社勤務)と前田一輝氏(現在 住友精密工業株式会社勤務)に感謝いたします。

参考文献

- (1)島本憲夫, "車両用熱交換器の性能評価実験", 北九州工業高等専門学校研究報告, 第51号, pp.1-6, 2018.
- (2)榮田裕樹, "ラジエータおよびオイルクーラの性能向上に関する実験的研究", 平成27年度特別研究論文, 2016.
- (3)前田一輝, "熱交換器の高付加価値に関する研究", 平成28年度特別研究論文, 2017.
- (4)日本機械学会編, "伝熱工学資料 改訂第5版", 日本機械学会, 2005.

Appendix

A. 最小二乗法によるべき指数 β の算出

空気側圧力損失 Δp と流速 U とは、 $\Delta p \propto U^\beta$ のべき乗の相関関係があることがわかっている⁽¹⁾。測定実験で得られた風速と空気側圧力損失のデータセット($U_i, \Delta p_i$)が、次の関係に最も合致するような、 β と C を、最小二乗法に基づいて算定する。

$$\Delta p_i = C \cdot U_i^\beta \quad (C \text{は定数}) \quad (\text{A.1})$$

自然対数を底に，式(A.1)の両辺の対数をとると，

$$\log_e(\Delta p_i) = \log_e(C \cdot U_i^\beta) = \log_e(C) + \beta \cdot \log_e(U_i) \quad (\text{A.2})$$

ここで，次のように変数を置き換える．

$$Y_i = \log_e(\Delta p_i), \quad X_i = \log_e(U_i)$$

$$A = \beta, \quad B = \log_e(C)$$

これにより，新たに定義されたデータセット (X_i, Y_i) の一次式の関係に変換される．

$$Y_i = A \cdot X_i + B \quad (\text{A.3})$$

この傾き A と Y 切片 B を，最小二乗法により求める．次の式により A と B を決定できる．

$$A = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \quad (\text{A.4})$$

$$B = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i^2)(\sum_{i=1}^n Y_i) - (\sum_{i=1}^n X_i Y_i)(\sum_{i=1}^n X_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \quad (\text{A.5})$$

この計算から，次のように β と C が算定できる．

$$\beta = A, \quad C = e^B \quad (\text{A.6})$$

(2018年11月 5日 受理)