

面内せん断の無限遠一様荷重を受ける二楕円孔を有する異方性弾性体の解析 種 健・佐々木 徹*・内田 武

Analysis for general anisotropic elastic body with two-elliptic holes subjected to uniform in-plane shear loadings at infinity

Takeshi TANE, Toru SASAKI and Takeshi UCHIDA

Abstract

Analysis for an anisotropic elastic medium is important, because of used amount of "anisotropic materials" such as CFRP and 3d-printed materials is increased year by year in aerospace, automobile, and other industry fields. Many calculation results are shown by several researchers for lots of arbitrary problems. For example, stress intensity factors on crack tip for each fracture modes are derived through using two-dimensional elastic theory for anisotropic body. In this study, an analytical solution of an anisotropic elastic body with two elliptical holes is shown, under several assumptions that (1) the medium is subjected uniformly in-plane shear stress at infinity, (2) stress, displacement are not vary along the thickness direction. Then some numerical representation for stress distributions and stress intensity factors are shown graphically. It is noted that the solution for the crack is obtained, when the minor axis of the hole is approached to zero.

Keywords : Anisotropy, Elasticity, Two Elliptical Hole, In-plane Shear, Two-dimensional Elastic Theory

1. 緒言

自動車産業や航空宇宙産業などの各分野では、CFRP等の複合材料が多く用いられるようになってきている。また、近年は熱溶解積層法に代表されるように、3Dプリンティング技術の普及が進んでいる。

これらの材料は共通して力学的異方性挙動を示すことがほとんどであるため、面内あるいは面外せん断の任意負荷が作用する場合の応力・変形挙動の評価を目的とした解析が多数実施されている。

そこで、現在著者らは内部に2楕円孔を有する問題について、これらの寸法に比べ十分遠方より一様な面内荷重、面外せん断荷重が作用している場合の解析解を導出している⁽¹⁾。前報では、一様引張荷重が作用する問題についての応力・変位分布の計算を行うとともに、亀裂先端における破壊モードIの応力拡大係数を計算した。

本報ではその続報として、図1に示すように面内の無限遠一様せん断を受ける場合の計算例を示すものである。なお、2楕円孔の長軸あるいは短軸を0に近づけると、図2に示すような2亀裂材の解析が可能となる。このことから、これら亀裂先端における応力拡大係数について、直交異方性を仮定し、弾性主軸の傾斜による影響の検討などを行う。

2. 基礎方程式

2.1 問題設定

図1のように、長軸あるいは短軸のいずれかがx軸およびy軸向きに取られた2楕円孔 L_j ($j = 1, 2$)を有する異方性弾性体を対象に検討する。これらの楕円孔は長軸 a_j 、短軸 b_j で中心 (x_j, y_j) に位置し、弾性体は孔寸法に比べて十分な広がりを持ち、遠方から面内の一様せん断荷重 τ_{xy}^0 ($= \tau_{yx}^0$)が作

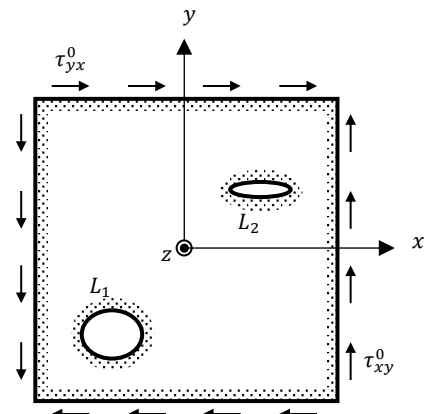


図1 解析モデル

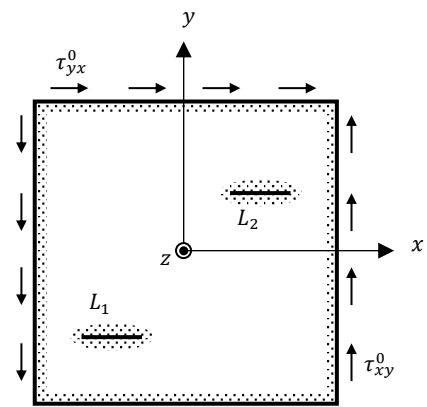


図2 2亀裂を有する場合

用するものと仮定する。

図2は、楕円孔の両方を亀裂とした場合の解析モデルを示し、図1の長軸あるいは短軸のいずれかを0とすることにより取り扱うことができる。一般的な異方性により、面内せん断荷重によっても亀裂先端における応力拡大係数も連成

* 長岡工業高等専門学校機械工学科

することが想定されるため、これらの検討を行う。

2.2 応力、変位および応力拡大係数を求める公式

前報より、図1の複素応力関数は次式によって与えられる。

$$\phi_k(z_k) = \phi_k^*(z_k) + \sum_{j=1}^2 \phi_{k,j}(z_k). \quad (1)$$

$\phi_k^*(z_k)$ は、図1の L_1 がない場合の複素応力関数、 $\phi_{k,j}(z_k)$ は拘束解除法により L_j の無負荷境界条件が満たされるように決定された補助関数である。また、 L_j を単位円に変換する写像関数として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} z_k - z_{k,j} &= R_{k,j} \left(\zeta_{k,j} + \frac{m_{k,j}}{\zeta_{k,j}} \right), \\ R_{k,j} &= \frac{a_j - i\mu_k b_j}{2}, \quad m_{k,j} = \frac{a_j + i\mu_k b_j}{a_j - i\mu_k b_j}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $z_{k,j} = x_j + \mu_k y_j$ である。

式(1)より、図1の応力、変位は次式で決できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \phi_k'(z_k), \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k'(z_k), \\ \tau_{yz} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k'(z_k), \\ \tau_{xz} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \lambda_k \phi_k'(z_k), \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k'(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k p_k \phi_k(z_k), \\ v &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(z_k), \\ w &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、図2の亀裂 L_j の右側先端における各破壊モードに対する応力拡大係数を次式で評価することができる。

$$\left. \begin{aligned} K_{I,1} &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_{k,1}^1(+1), \\ K_{II,1} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_{k,1}^1(+1), \\ K_{III,1} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_{k,1}^1(+1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{I,2} &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \{ \phi_k^{*1}(+1) + \phi_{k,2}^1(+1) \}, \\ K_{II,2} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \{ \phi_k^{*1}(+1) + \phi_{k,2}^1(+1) \}, \\ K_{III,2} &= -2 \sqrt{\frac{\pi}{c_2}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \{ \phi_k^{*1}(+1) + \phi_{k,2}^1(+1) \}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 c_j は L_j の半長である(楕円孔の特別な場合として、長軸 $a_j = c_j$ 、短軸 $b_j = 0$ としている)。なお、応力拡大係数の表示を簡便にするため、式(2)を考慮して z_k で微分した複

素応力関数を $\phi_k'(z_k) \rightarrow \phi_k^1(\zeta_k)$ と表示している。

3. 数値計算例

前報に続き直交異方性弾性材料として、以下の縦弾性係数比およびポアソン比を有する材料について検討を行う。

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} &= 0.200, & \frac{E_3}{E_1} &= 1.000, \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{32} &= 0.25. \end{aligned} \right\}$$

横弾性係数は、次式で評価されるものと仮定する。

$$\frac{1}{G_{ij}} = \frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} + \frac{1}{2E_i}. \quad (7)$$

弾性主軸と図2に示す座標軸との関係については、

$$E_1 = E_x, \quad E_2 = E_y, \quad E_3 = E_z.$$

を基準とし、 E_2 および E_3 を x 軸まわりに回転角 α で傾斜している場合の影響を検討する($\alpha = 90^\circ$ のとき、 $x-y$ 平面内において等方性弾性挙動を示す)。

3.1 等径2円孔を有する無限板のせん断

図3に示すように、半径 R の等径2円孔が間隔 λ 、 x 軸に対し角度 ζ で傾斜して存在する場合を考える。

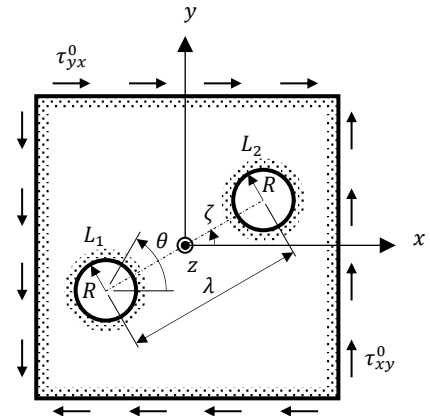


図3 等径2円孔無限板のせん断

はじめに、図4は $\alpha = 45^\circ$ 、 $\zeta = 0^\circ$ 、 $\lambda/R = 3$ における作用荷重で正規化した応力分布図を示している。このうち、(a)は τ_{xy}/τ_{xy}^0 、(b)は τ_{yz}/τ_{xy}^0 の分布を表している。

この条件で、双方の応力集中係数を次式：

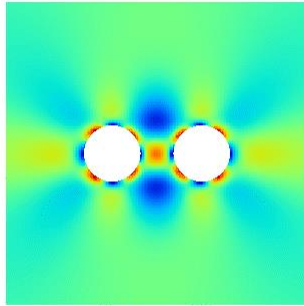
$$K_{\tau_{xy}} = \frac{(\tau_{xy})_{\max}}{\tau_{xy}^0}, \quad K_{\tau_{yz}} = \frac{(\tau_{yz})_{\max}}{\tau_{xy}^0}. \quad (7)$$

で求めたところ、これらは境界上で生じることが分かった。 L_1 を例にとると、 $\theta = 128^\circ$ において $K_{\tau_{xy}} = 2.27$ 、 $\theta = 24^\circ$ において $K_{\tau_{yz}} = 1.21$ が得られた。

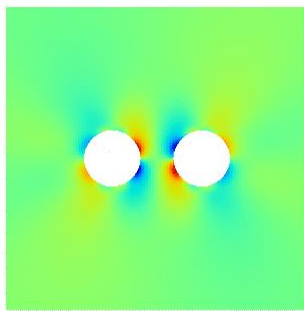
面内せん断の場合、前報の短軸引張の場合に比べて $K_{\tau_{yz}}$ が5倍以上になり、連成の効果が大きいことが確認された。続いて円孔間隔 λ/R と x 軸まわりの弾性主軸の傾斜角 α が応力集中係数に及ぼす影響を見るために、これらをパラメータとして、式(7)により応力集中係数を求めた結果を図4に示す。大括弧内の値は、 L_1 (左側の円孔)において $K_{\tau_{xy}}$ および $K_{\tau_{yz}}$ を生じる角度 θ ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$)である。

表1から、 λ/R が小さくなるにつれて応力集中係数は大きくなること、同一の λ/R では α が変化しても応力集中係数の変化は非常に小さいことが分かる。

また、最大応力の作用位置は $\alpha = 0^\circ$ で円孔左上 ($\theta > 90^\circ$)、 $\alpha = 90^\circ$ で円孔右上 ($\theta < 90^\circ$) となり、 $\alpha = 45^\circ$ ではこれらの中間的挙動を示す。



(a) τ_{xy}/τ_{xy}^0



(b) τ_{yz}/τ_{xy}^0

図4 $\alpha = 45^\circ, \zeta = 0^\circ, \lambda/R = 3$ の応力分布図

表1 等孔2円孔の応力分集中係数

λ/R	Inclination Angle α [deg.]		
	0.0	45.0	90.0
10	2.06 [123] (0.00)	2.06 [50] (0.60) [32]	2.04 [45] (0.00)
6	2.12 [123] (0.00)	2.14 [49] (0.69) [31]	2.12 [44] (0.00)
4	2.21 [122] (0.00)	2.22 [47] (0.88) [29]	2.25 [42] (0.00)
3	2.29 [121] (0.00)	2.27 [128] (1.21) [24]	2.36 [38] (0.00)

3.2 等長2亀裂を有する無限板の応力拡大係数

前報に続き、図5に示すように長さ $2c$ の2亀裂が間隔 λ で存在している場合について、亀裂先端における応力拡大係数の計算例を示す。

等方性弾性挙動を示す場合、図5の亀裂右側先端における破壊モードIIの応力拡大係数は次式によって与えられる⁽²⁾。

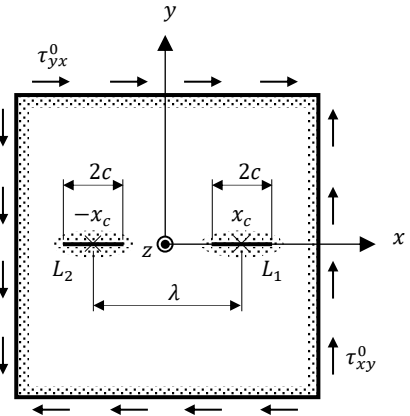


図5 2亀裂を有する無限板

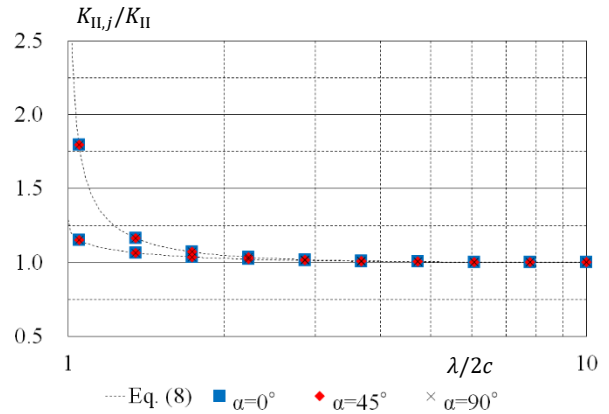


図6 回転角 α が亀裂右側先端の正規化応力拡大係数 $K_{II,j}/K_{II}$ に及ぼす影響

$$K_{II,j} = \frac{D_j}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2} (\lambda + 2c) \tau_{xy}^0} \quad (j = 1, 2) . \quad (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \left\{ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right\} , \\ D_2 &= - \sqrt{\frac{\lambda + 2c}{\lambda - 2c}} \left\{ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} - k^2 \right\} . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi , \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda + 2c}{\lambda - 2c} \right)^2} . \quad (10)$$

等方性の場合の式(8)を $\lambda/2c$ に対して計算すると、図6の波線のような曲線が得られる。ここで図6の縦軸には、式(5)および式(6)で求められる亀裂 L_j の右側先端における応力拡大係数 $K_{II,j}$ を無限板中の1亀裂の応力拡大係数 $K_{II} = \tau_{xy}^0 \sqrt{\pi c}$ で正規化した結果もマーカーで示してあり、マーカーは弾性主軸の傾斜角 α の別を表している。

この図において、 $\alpha = 90^\circ$ は $x-y$ 平面内等方性の場合に相当するため、破線上に完全にプロットされて正しい結果が得られていることを示している。

また、本論文で強調したいことの1つとして、2亀裂が同一直線上に存在するとき、その他の α 、すなわち、材料異方性を生じた場合についても等方性の場合と完全に一致していることが挙げられる。これは、破壊モードIについて著者らが前報で報告した内容と同じものであり、1亀裂の無限版の場合について、Sihら(3)が報告したのと同じ傾向であるといえる。

なお、横軸の $\lambda/2c > 3.85$ で双方の亀裂ともに $K_{IIj}/K_{II} < 1.01$ を満たすようになり、相互亀裂による応力拡大係数への影響はほぼ消失していると考えられる。また、 $\alpha = 45^\circ$ においては面外成分である K_{IIIj} の連成が起こるのではないかと思われたが、実際には前報と同じように生じない結果が得られている。

4. 結言

本論文では2楕円孔を有する異方性無限板に無限遠面内一様せん断が作用する場合についての解を示すとともに、数値計算を行った。なお、今回は前報と同様に楕円孔の長短軸は水平もしくは鉛直方向を向いている、との制約の下での計算となっており、今後は長短軸が任意方向にとられた場合の解の誘導を行うことが課題と言える。

数値計算例では、2等円孔が存在する場合の応力集中係数

の検討、等長2亀裂が同一兆区線上に存在する場合の応力拡大係数の検討を行った。2等円孔の解析では、円孔間隔が狭くなるにつれて応力集中係数が大きくなること、また、弾性主軸の面外傾斜によって、前報の短軸引張に比べるとより大きな面外せん断応力を連成することが確認できた。

また、等長2亀裂の応力拡大係数解析では、前報で破壊モードIの応力拡大係数を検討したのにつき、破壊モードIIについての解析・検討を行った。その結果、破壊モードの違いによらず、同一直線上に存在する2亀裂については、材料異方性の影響を受けることなく、等方性の場合と同じ応力拡大係数となることが分かった。

今後は、縦2列あるいはより一般的な任意位置に孔や亀裂が存在する場合について検討を行う必要があると考えられる。また、亀裂と楕円孔の組合せに対する応力解析なども視野に入っている。

参考文献

- (1) 種健, 佐々木徹, 池上大成, 内田武, 面内および面外せん断荷重が作用する2楕円孔を有する異方性弾性体の解析および応力拡大係数の計算, 北九州工業高等専門学校研究報告, Vol. 53 (2020), pp. 11-16.
- (2) 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 培風館, (1976a), pp. 24.
- (3) Sih, G. C., Paris, G. C. and Irwin, G. R., On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, International Journal of Fracture Mechanics, No. 1 (1965), pp. 189-203.

(2021年11月 1日 受理)