面内荷重を側面に受ける異方性だ円筒の解析

種　　健・内田　　武・萬　　恒平*・佐々木　徹**・浜野　浩幹***

Analysis for Anisotropic Tube Subjected Arbitrary In-Plane-Loadings on Lateral Surface

Takeshi TANE, Takeshi UCHIDA, Kohei YOROZU, Toru SASAKI and Hiroki HAMANO

Abstract

This paper discusses analytical solution for anisotropic tube which is subjected to several in-plane loadings along both sides. It is supposed that these loadings are not changed in the direction of a generator. A characteristic of this study is to introduce convergence calculation so-called “constraint release technique” for two elastic problems. Analyses are carried out using theory of two-dimensional elasticity, since general solutions are derived from complex stress functions that were shown by S. G. Lekhnitskii. Some example calculations are shown graphically.

Key words : Anisotropy, Tube, Constraint Release Technique

１．緒　　言

多重連結領域の二次元問題において，材料が等方性弾性を示す場合の円筒の解析は，複素応力関数を円柱座標形式で表示することができるため，比較的容易に行うことができる．したがって，この問題は既往の弾性学や材料力学等の著書でしばしば取り上げられている [1), 2)].

また，等方性を示すだ円筒の問題は，内外の境界を円形境界に写像する新たな関数を導入して解析が行われている [3)]. ただし，この手法で取り扱うことのできるのは，内外の境界が共焦点のだ円である場合に限られ，内外が独立しただ円である場合などについての解は求められていない．

一方，材料が異方性弾性を示す場合は，Lekhnitskii により解析理論が示されている [4), 5)]．しかしながら，本論文で対象とするだ円筒の問題については，等方性の場合のような写像関数が存在しないことなどから解が求められていない．

そこで本論文では，一般的な異方性を示すだ円筒の内外両側面に，*x-y* 平面内の荷重が作用する場合の解を求めることを目的とする．解析にあたっては，二種類の問題の解，すなわち，①異方性だ円柱，②だ円孔を有する異方性無限体，の解を利用する．だ円柱の側面をだ円筒の外側境界，だ円孔の側面をだ円筒の内側境界に対応させ，二つの問題の間で収束計算を行うことにより，外側・内側側面の力学的境界条件を満足させる拘束解除法を採用する．そして，いくつかの数値計算例を示す．

２．基礎方程式

2.1　解析モデル

本論文では，図１に示す異方性だ円筒の内外の境界 L^0, L^1 に一般的な外力 X_n^j, Y_n^j $(j = 0,1)$ が作用する場合の解を求める．各々のだ円境界の長軸および短軸は a_j および b_j $(j = 0, 1)$ と表わす．また，これらの外力および筒の断面形状は，z 軸方向に変化しないものと仮定する．

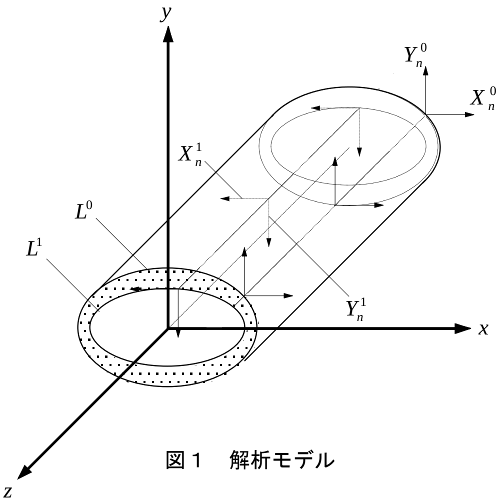


図１　解析モデル

2.2　写像関数

第 1 章において述べたように，図１のだ円筒の解は，境界 L^0 を有するだ円柱と境界 L^1 をだ円孔として有する無限体に分けて求める．そこで，これらの問題の解析に必要となる以下の写像関数を導入する．

$$
\left.
\begin{array}{l}
z_{k,j} = x + \mu_k y = \omega_{k,j}(\zeta_{k,j}) = R_{k,j}\left(\zeta_{k,j} + \dfrac{m_{k,j}}{\zeta_{k,j}}\right), \\
R_{k,j} = \dfrac{1}{2}(a_j - i\mu_k b_j),\ m_{k,j} = \dfrac{a_j + i\mu_k b_j}{a_j - i\mu_k b_j}, \\
\qquad\qquad\qquad (k = 1,2,3,\ \ j = 0,1).
\end{array}
\right\} \tag{1}
$$

すると, 図１の各境界は, 最終的に図２(c)に示すような $\zeta_{k,j}$ 平面上の単位円に写像変換することができる．なお，式中の添字 j はだ円柱の問題に対して 0, だ円孔を有する無限体の問題に対して 1 の値をとる（以後同様）．

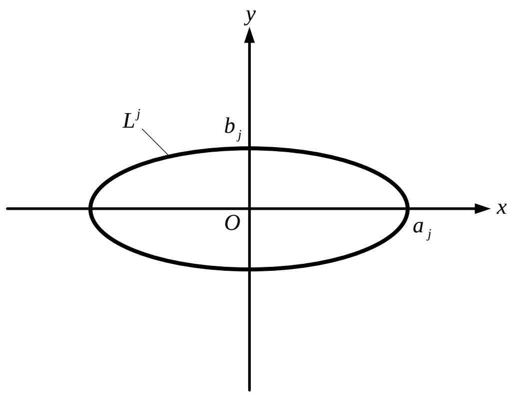
2.3　基礎方程式

紙面の都合上，詳細については参考文献を参照のこと [5)].

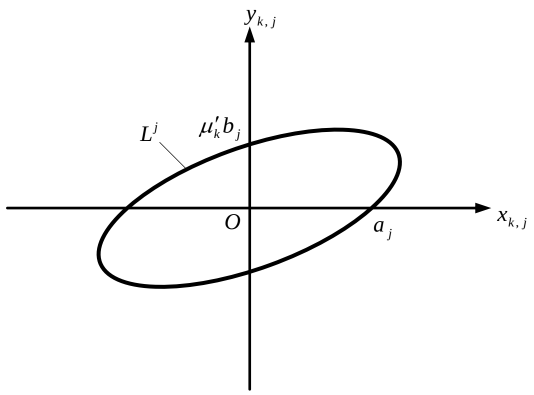
力の釣合方程式

$$
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,\ \ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,\ \ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{2}
$$

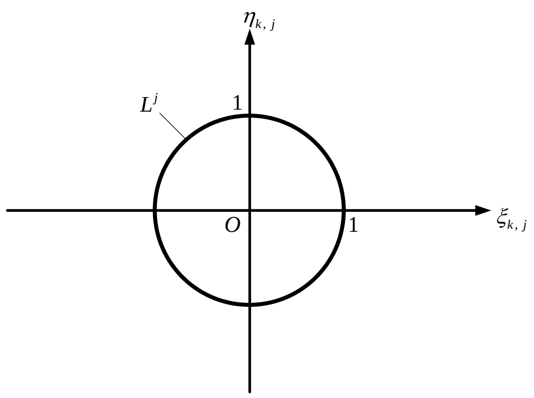
*　北九州工業高等専門学校専攻科学生　生産工学専攻
** 長岡技術科学大学工学部機械系
***松江工業高等専門学校名誉教授



(a) z 平面（$z = x + iy$）



(b) $z_{k,j}$ 平面（$z_{k,j} = x_{k,j} + iy_{k,j}$）



(c) $\zeta_{k,j}$ 平面（$\zeta_{k,j} = \xi_{k,j} + i\eta_{k,j}$）

図２　だ円境界の写像

応力関数

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \tau_{zx} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

幾何式

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y},\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

ひずみの適合方程式

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

構成方程式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{24} & \beta_{25} & \beta_{26} \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{44} & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{15} & \beta_{25} & \beta_{45} & \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{46} & \beta_{56} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \frac{1}{a_{33}} \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{34} \\ a_{35} \\ a_{36} \end{Bmatrix} \sigma_z. \quad (6)$$

2.4　支配方程式および一般解

異方性弾性を示す材料の場合，式(5)に式(6), (3)を代入することにより，応力関数 F, ψ は以下の連立偏微分方程式を満足する必要がある．

$$L_4 F + L_3 \psi = 0,\ L_3 F + L_2 \psi = 0.$$

上式を F, ψ について解くと，これらは全く同じ型式の偏微分方程式を満たさなければならないことが分かる．

$$(L_4 L_2 - L_3^2) F = 0,\ (L_4 L_2 - L_3^2) \psi = 0. \quad (7)$$

ここに，L_j は j 階の偏微分演算子である（略）．

式(7)の一般解は，複素応力関数 $\phi_k(z_k)$ を用いて，次式によって与えられる．

$$F(x, y) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \int \phi_k(z_k) dz_k,\ \psi(x, y) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \phi_k(z_k). \quad (8)$$

2.5　合力，応力，変位の一般式

問題に応じた複素応力関数を用いて，材料内の合力・応力および変位成分は以下のように計算できる．

$$\left. \begin{aligned} &\pm P_x = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \mu_k \phi_k(z_k),\ \pm P_y = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \phi_k(z_k), \\ &\pm P_z = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_x = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \mu_k^2 \phi_k'(z_k),\ \sigma_y = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \phi_k'(z_k), \\ &\tau_{yz} = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \phi_k'(z_k),\ \tau_{zx} = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \mu_k \lambda_k \phi_k'(z_k), \\ &\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \mu_k \phi_k'(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} &u = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \mu_k p_k \phi_k(z_k),\ v = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} q_k \phi_k(z_k), \\ &w = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} r_k \phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

３．拘束解除法

3.1　単連結領域問題に対する複素応力関数

はじめに，図１の外側境界 L^0 を側面とするだ円柱に任意の荷重 $X_{n,0}^0, Y_{n,0}^0$ が分布する場合の複素応力関数は，以下のように与えられる．

$$\left. \begin{aligned} &\phi_{k,0}(z_{k,0}) = \Gamma_{k0,0} + \Gamma_{k1,0} z_{k,0} + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_{kn,0} P_{kn}(z_{k,0}), \\ &P_{kn}(z_{k,0}) = -(\zeta_{k,0}^{+\ n} + \zeta_{k,0}^{-\ n}),\ (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

次に，図１の内側境界 L^1 をだ円孔表面に持つ無限体に任意荷重 $X_{n,1}^1, Y_{n,1}^1$ が分布する場合の複素応力関数は，以下のよう

に表すことができる.

$$\phi_{k,1}(z_{k,1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{kn,1}\zeta_{k,1}^{-n} \quad (k = 1,2,3). \tag{13}$$

式(12)および式(13)において，未定係数 $\Gamma_{kn,j}$ は L^j における境界条件から決定される複素定数である.

3.2　拘束解除法の適用

はじめに，だ円柱の解析を行う．その表面にだ円筒の外側境界 L^0 の荷重が作用している以下の場合を考える.

$X_{n,0}^0 = X_n^0$，$Y_{n,0}^0 = Y_n^0$，$Z_{n,0}^0 = Z_n^0$.

この荷重（合力）を周期 2π の Fourier 級数に展開して次式：

$$\left.\begin{aligned} -P_{x,0}^1 &\overset{set}{=} -b_{0,0} - \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{b}_{n,0}\sigma^{-n} + b_{n,0}\sigma^{n}), \\ -P_{y,0}^1 &\overset{set}{=} \quad a_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_{n,0}\sigma^{-n} + a_{n,0}\sigma^{n}), \end{aligned}\right\} \ on\ L^0. \tag{14}$$

のように表されたとすると, 式(12)の未定係数は以下のように決定できる.

$$\left.\begin{aligned} &2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\Gamma_{k0,0} = b_{0,0},\ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\Gamma_{k0,0} = a_{0,0}, \\ &2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Gamma_{k0,0} = 0,\ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k p_k\Gamma_{k0,0} = 0, \\ &2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\Gamma_{k0,0} = 0,\ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\Gamma_{k0,0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^2\Gamma_{k1,0} = \frac{b_{1,0}-\bar{b}_{1,0}}{ib_0},\ 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\Gamma_{k1,0} = -\frac{a_{1,0}+\bar{a}_{1,0}}{a_0}, \\ &2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Gamma_{k1,0} = 0,\ 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\lambda_k\Gamma_{k1,0} = 0, \\ &2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\Gamma_{k1,0} = \frac{a_{1,0}-\bar{a}_{1,0}}{ib_0} = -\frac{b_{1,0}+\bar{b}_{1,0}}{a_0}, \\ &2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}(q_k-\mu_k^2 p_k)\Gamma_{k1,0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{3}(\mu_k m_k^n\Gamma_{kn,0} + \bar{\mu}_k\bar{\Gamma}_{kn,0}) = -\bar{b}_{n,0}, \\ &\sum_{k=1}^{3}(\mu_k\Gamma_{kn,0} + \bar{\mu}_k\bar{m}_k^n\bar{\Gamma}_{kn,0}) = -b_{n,0}, \\ &\sum_{k=1}^{3}(m_k^n\Gamma_{kn,0} + \bar{\Gamma}_{kn,0}) = -\bar{a}_{n,0}, \\ &\sum_{k=1}^{3}(\Gamma_{kn,0} + \bar{m}_k^n\bar{\Gamma}_{kn,0}) = -a_{n,0}, \\ &\sum_{k=1}^{3}(\lambda_k m_k^n\Gamma_{kn,0} + \bar{\lambda}_k\bar{\Gamma}_{kn,0}) = -\bar{c}_{n,0}, \\ &\sum_{k=1}^{3}(\lambda_k\Gamma_{kn,0} + \bar{\lambda}_k\bar{m}_k^n\bar{\Gamma}_{kn,0}) = -c_{n,0}, \end{aligned}\right\} (n \ge 2). \tag{17}$$

次に，だ円孔を有する無限体の解析を行う．だ円孔の表面にだ円筒の内側境界 L^1 の荷重および【だ円柱の解析により生じる境界 L^1 の合力の逆符号分】が作用している場合を考える.

$X_{n,1}^1 = X_n^1 - X_{n,0}^1$，$Y_{n,1}^1 = Y_n^1 - Y_{n,0}^1$，$Z_{n,1}^1 = Z_n^1 - Z_{n,0}^1$.

この荷重（合力）についても周期 2π の Fourier 級数に展開して以下：

$$\left.\begin{aligned} +P_{x,1}^1 &\overset{set}{=} -b_{0,1} - \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{b}_{n,1}\sigma^{-n} + b_{n,1}\sigma^{n}), \\ +P_{y,1}^1 &\overset{set}{=} \quad a_{0,1} + \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_{n,1}\sigma^{-n} + a_{n,1}\sigma^{n}), \end{aligned}\right\} \ on\ L^1. \tag{18}$$

のように表されたとすると，複素応力関数(13)の未定係数 $\Gamma_{kn,1}$ が次式で求められる.

$$\left.\begin{aligned} &2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\Gamma_{k0,1} = b_{0,1},\ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\Gamma_{k0,1} = a_{0,1}, \\ &2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Gamma_{k0,1} = 0,\ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k p_k\Gamma_{k0,1} = 0, \\ &2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\Gamma_{k0,1} = 0,\ 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\Gamma_{k0,1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{3}\mu_k\Gamma_{kn,1} = \bar{b}_{n,1},\ \sum_{k=1}^{3}\bar{\mu}_k\bar{\Gamma}_{kn,0} = b_{n,1}, \\ &\sum_{k=1}^{3}\Gamma_{kn,1} = \bar{a}_{n,1},\ \sum_{k=1}^{3}\bar{\Gamma}_{kn,1} = a_{n,1}, \\ &\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Gamma_{kn,1} = \bar{c}_{n,1},\ \sum_{k=1}^{3}\bar{\lambda}_k\bar{\Gamma}_{kn,1} = c_{n,1}, \end{aligned}\right\} (n \ge 1). \tag{20}$$

ここからは, だ円柱およびだ円孔を有する無限体の間で（互いの仮想境界上の合力が十分小さくなるまで）繰り返し収束計算を行う.

だ円柱について，式(15)から式(17)により i 番目の収束計算により得られた未定係数を $\Gamma_{kn,0}^{i}$，だ円孔を有する無限体について，式(19)から式(20)により同じく i 番目の収束計算により得られた未定係数を $\Gamma_{kn,1}^{i}$ とする．境界上の合力の境界条件が十分満たされるように，M_C 回の収束計算を行ったとすると，式(12)および式(13)の未定係数は最終的に次式によって求められる.

$$\Gamma_{kn,j} = \sum_{m=1}^{M_C}\Gamma_{kn,j}^{m} \quad (j = 0,1,\ k = 1,2,3,\ n \ge 0). \tag{21}$$

これより，最終的なだ円筒の複素応力関数は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned} \phi_k(z_k) &= \sum_{j=0}^{1}\phi_{k,j}(z_{k,j}) \\ &= \Gamma_{k0,0} + \Gamma_{k1,0}z_{k,0} + \sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_{kn,0}P_{kn}(z_{k,0}) + \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_{kn,1}\zeta_{k,1}^{-n}. \end{aligned} \tag{22}$$

4．数値計算例

第 3 章の理論を用いて数値計算例を示すにあたり，とくに断らない限り，だ円筒の物性は直交異方性を仮定して以下の値を用いることとする.

$$\left.\begin{aligned} &e_2 \overset{\mathrm{set}}{=} \frac{E_2}{E_1} = 0.20,\ e_3 \overset{\mathrm{set}}{=} \frac{E_3}{E_1} = 1.00, \\ &\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{32} = 0.25,\ \alpha = \gamma = 45°,\ \beta = 0°. \end{aligned}\right\}$$

ここに，E_1, E_2 および E_3 は縦弾性係数，ν_{ij} はポアソン比，α, β および γ は x, y および z 軸からの弾性主軸の傾斜角を

表す．つまり，$\alpha=\beta=\gamma=0°$ のとき，$E_1=E_x, E_2=E_y$ および $E_3=E_z$ である．また，$\alpha=90°, \beta=\gamma=0°$ のとき，$E_1=E_z$，$E_2=E_y$ および $E_3=E_x$ である．

具体的な計算に入る前に，代表的な荷重として 4.1 節および 4.2 節に示す各荷重について，Fourier 係数を求めた例を紹介し，その後，これらの荷重について具体的な検討を行う．

4.1　作用荷重と未定係数

(1) 対向集中荷重の場合

図３に示すように，だ円形リングの長軸 a_j に X^j，短軸 b_j に Y^j の集中荷重が作用する場合を考える（$j=0,1$）．

このとき，式(14)の Fourier 係数 $a_{n,0}, b_{n,0}$ と式(18)の Fourier 係数 $a_{n,1}, b_{n,1}$ は，以下のように求めることができる．

$$\left.\begin{aligned} &a_{0,j}=\frac{Y^j}{2},\; a_{n,j}=-\frac{Y^j}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\\ &b_{0,j}=-\frac{X^j}{2},\; b_{n,j}=\frac{iX^j}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{2},\end{aligned}\right\}(j=0,1,\; n\geq 1). \tag{23}$$

(2) 対向分布荷重の場合

まず，図３の対向集中荷重 X^j を近似的に取り扱うことのできる図４の載荷状態，すなわち，x 軸をはさむ角度 $\omega\,(rad)$ の範囲の L^j 境界に沿って法線方向の垂直応力 p^j が作用する問題を考える（$j=0,1$）．

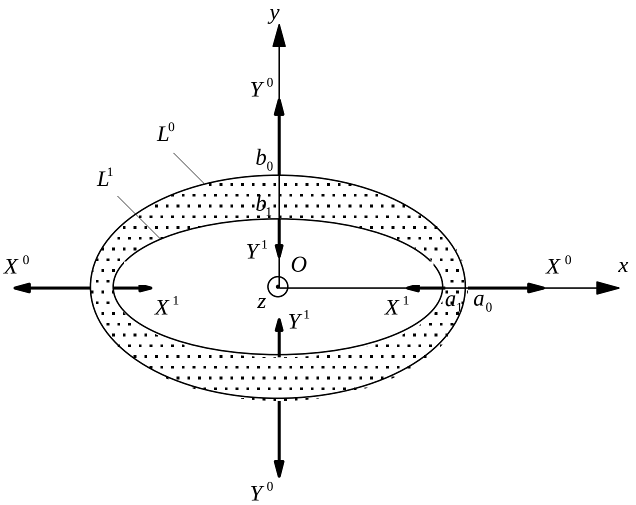


図３　対向集中荷重

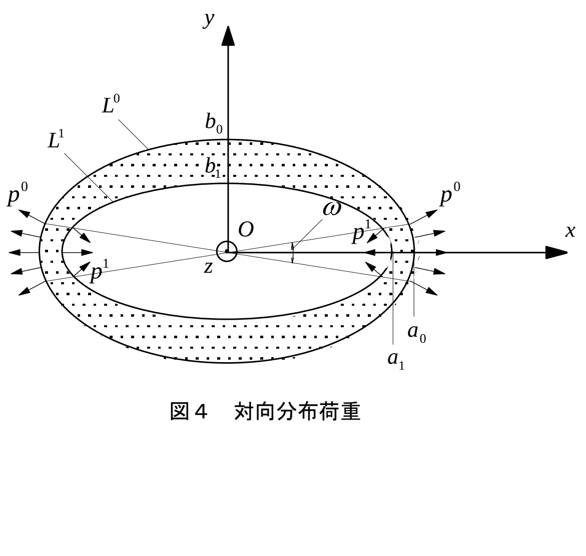


図４　対向分布荷重

このとき，式(14)の Fourier 係数 $a_{n,0}, b_{n,0}$ と式(18)の Fourier 係数 $a_{n,1}, b_{n,1}$ は，以下のように求めることができる．

$$\left.\begin{aligned} &a_{1,j}=\frac{a_j p^j}{2\pi}(2\theta_j-\sin 2\theta_j),\; b_{1,j}=-\frac{if_j a_j p^j}{2\pi}(2\theta_j+\sin 2\theta_j),\\ &a_{n,j}=\frac{a_j p^j}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{2}\left\{\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta_j-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta_j\right\},\\ &b_{n,j}=-\frac{if_j a_j p^j}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{2}\left\{\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\theta_j+\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta_j\right\},\\ &\qquad (j=0,1,\; n\geq 2).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ここに，

$$\theta_j=\tan^{-1}\left(\frac{1}{f_j}\tan\frac{\omega}{2}\right). \tag{25}$$

$f_j=b_j/a_j$ は図４の L^j 境界の偏平率を表す．

特別な場合として，$\theta_j\approx\omega/2\to 0$ のときには式(24)の Fourier 係数は

$$\left.\begin{aligned} &a_{n,j}=0,\\ &b_{n,j}=\frac{if_j X^j}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{2},\end{aligned}\right\}(j=0,1,\; n\geq 1). \tag{26}$$

となって，式(23)の対向集中荷重の解に漸近する．ここに，次式の関係を利用した．

$$-X^j=\omega a_j p^j. \tag{27}$$

また，$\theta_j=\omega/2=\pi/2$ のときには式(24)の Fourier 係数は

$$\left.\begin{aligned} &a^1_{1,j}=\frac{a_j p^j}{2},\; a^1_{n,j}=0,\\ &b^1_{1,j}=-\frac{if_j a_j p^j}{2},\; b^1_{n,j}=0,\end{aligned}\right\}(j=0,1,\; n\geq 2). \tag{28}$$

となり，だ円筒の L^j 境界に大きさ p^j の圧力が作用する問題の解となる．

4.2　収束計算回数と精度

L^0 境界の偏平率が $f_0=b_0/a_0=0.75$，層厚パラメータが $t=1-a_1/a_0=0.25, 0.33$ の二種類のだ円筒について，図３の集中荷重 X^0 が作用するときの収束計算回数 M_c と L^1 境界における応力成分（だ円柱座標系）零の境界条件の満足度の関係を図６に示す．

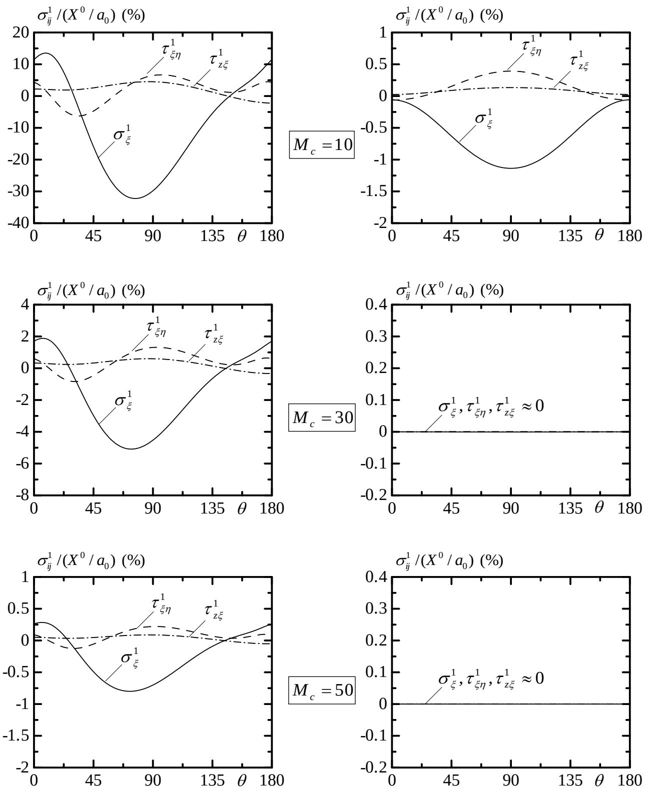
なお式(12)および式(13)は無限級数であるが，項数を増すほどその影響は小さくなる．したがって，ここでは既往の研究などに基づき，$N_C=250$ 項で打ち切ることとした．

内側境界の偏平率は，$t=0.25$ の場合が $f_1\approx 0.47$，$t=0.33$ の場合が $f_1=0.00$ である．つまり，後者は偏平率 f_0 のだ円柱の内部にスリットクラックが存在する場合に相当する．

どちらのだ円筒についても，収束計算回数 M_c が増加するほど内側境界での応力零の境界条件を満たしてゆく．ただし，$t=0.25$ の場合は $t=0.33$ の場合に比べて相対的に層厚が小さいため，収束の悪いことが観察される．

それでも $M_c=50$ とすれば，L^1 境界での応力零の誤差は 1% 未満となり，実用上は十分であることを示している．

また，$t=0.33$ の場合は内部にスリットクラックを有するに



(a)　$t = 0.25$　　(b)　$t = 0.33$

図５　収束計算回数と精度

も関わらず，層厚が大きいために $M_c=10$ の時点で十分に零に収束しているといえる．

以上から，以降の計算では荷重の種類，だ円筒の形状に関係なく収束計算回数は $M_c=50$ に設定する．そして複素解析関数の打ち切り項数については，対向集中荷重で $N_C = 250$ 項，対向分布荷重で $N_C = 100$ 項とする．

4.3　対向集中荷重の計算例

図６に L^1 境界の偏平率が $f_1=b_1/a_1\approx 1.00$，層厚パラメータが $t=0.667, 0.998$ であるだ円筒に対し，図３の対向集中荷重 X^1 が作用するときの x-y 平面内の最大せん断応力：

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\,. \tag{29}$$

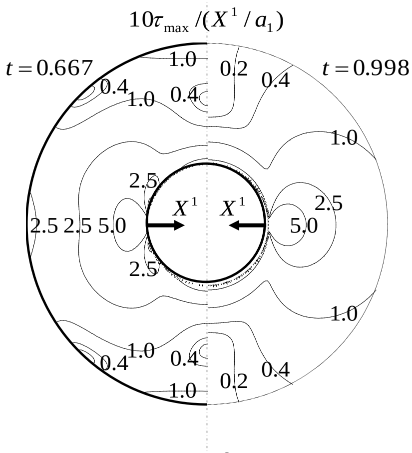
の等高線を示す．弾性主軸の傾斜は図題に示すとおりである．

各々の図の右側半分が $t=0.667$（$a_0/a_1=3$），左側半分が $t=0.998$（$a_0/a_1=500$）に対応させてあり，とくに後者は無限体中のだ円孔境界に X^1 が作用した問題である．

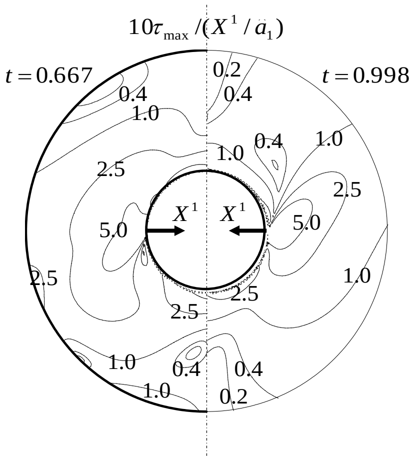
まず図６(a)より，すなわち $x-y$ 平面内で横等方性である場合は，y 軸を挟んで左右対称の分布になっていることが読み取れる．この図の右側の等高線は，中山が求めた解に完全に一致している [6]．

次に，図６(b)より弾性主軸 E_1, E_2 と $x-y$ 座標軸が z 軸まわりに $\gamma=45°$ の傾斜をなしている場合，最大せん断応力の等高線が傾斜している．

いまの場合，図６(b)の左下から右上に向けて E_1 軸（強軸）が存在し，応力分布はこの向きに引き伸ばされた分布となっており，妥当な計算結果が得られた．



(a)　$\alpha=90°$，$\beta=\gamma=0°$.



(b)　$\alpha=\beta=0°$，$\gamma=45°$.

図６　最大せん断応力の等高線

4.4　対向分布荷重の計算例

図４の $\omega/2\pi=1.0\%$，すなわち，$\omega=3.6°$ の範囲に垂直応力 p^0 が作用するときの x 軸上に生じる応力の分布を図７に示す．だ円筒の内外境界の偏平率は $f_j\approx 1.00$ ($j=0,1$) とした．

ただし，層厚パラメータは $t=0.250, 0.500, 0.750$ および 0.998 の四通り，また，だ円柱の解も載せている．

この図では弾性主軸の傾斜 $\alpha=\gamma=45°, \beta=0°$ の一般的な異方性としている．

図６からまず，各応力成分の分布はいずれも，円筒の層圧パラメータ t が増すほど，円柱の厳密解に漸近する傾向が見られ，妥当な計算結果であるといえる．

そして，L^1 境界上の a_1/a_0 $(=1-t)$ の点において，σ^1_x, τ^1_{zx} に対する応力零の境界条件を満たさなければならないが，この条件も完全に満たされている．

一方で応力 σ^1_y の分布は，L^1 境界の点に近づくにつれて急激な応力勾配を伴って変化し，L^1 境界上で大きな応力集中を生じている．

なお図７においては対向分布荷重の分布幅が $\omega/2\pi=1.0\%$ でこれを微小と見なし，以下の関係を導入している．

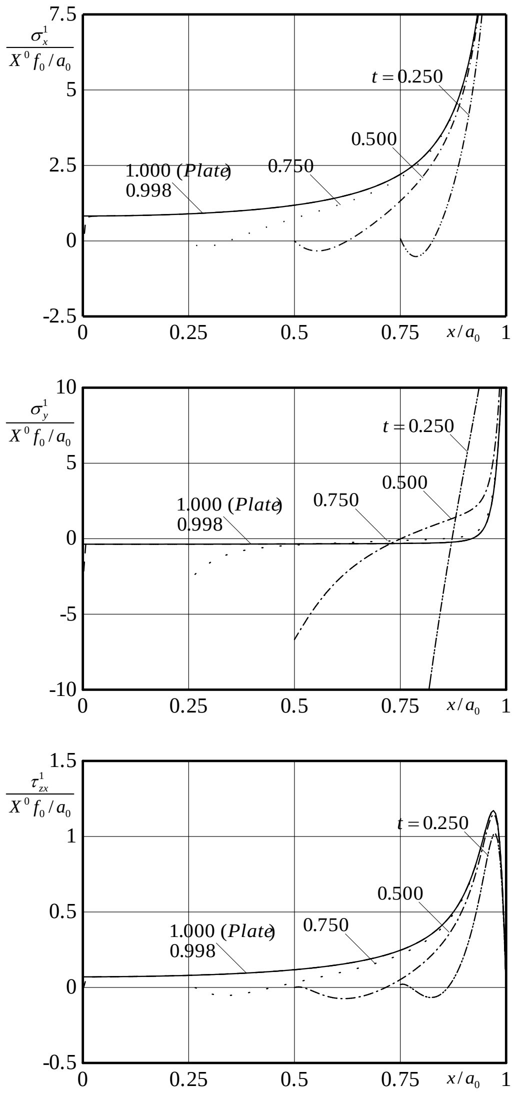


図７　x 軸上の応力分布

$$p^0 = -\frac{X^0}{a_0 \omega}. \tag{30}$$

５．結　　言

本論文では，一般的な異方性を示すだ円筒に対して，拘束解除法と呼ばれる収束計算手法を適用し解を求めた．これまでこの問題の解析は，二つの境界を同心円領域に写像する関数が存在しないことから，あまり行なわれていない．

各々の境界の写像関数を別々に単位円に写像した解析などはあるが，そうした中では変位場までを満足に決定できている事例はほとんどない．

本論文では，だ円筒の境界の面内荷重の分布をだ円柱座標系における応力成分で与えることにより，一般的な分布荷重についても取り扱いを可能にしており，いくつかの荷重様式についてその導出を行った．

ただし，収束計算の繰り返し数 M_c と対象とする問題の境界条件の収束性との関係に注意を払う必要がある．ここではだ円筒の外側境界，x 軸上に対向集中荷重 X^0 が作用する問題について議論し，$M_c = 50$ 回ほど収束計算を行なえば，十分な精度で解が得られることを確認した．

次に，円形リングにおける層厚パラメータを限りなく 1 に近づけ，外側境界に面内の対向分布荷重を作用させると，実用上問題のない程度に円柱体の解析結果に帰着することが確認された．

その他，同じく円形リングの層厚パラメータを限りなく 1 に近づけて内側境界に面内の対向集中荷重を作用させたときの解は，これまでに求められた無限体内部の円孔に同様の対向集中荷重が作用する問題の解に帰着し，本論文の妥当性が確認された．

参考文献

1) Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, 559pp., 1970.
2) 森口繁一，2 次元弾性論，岩波書店，77pp.，1957.
3) 川久保昌平，平島健一，複素応力関数を用いた楕円輪問題の応力・変位解析，材料，46-9，pp.1011-1016，1997.
4) Lekhnitskii, S. G., Anisotropic Plates, Gordon and Breach Science Publishers, 534pp., 1958.
5) Lekhnitskii, S. G.,Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden Day Inc., 404pp., 1963.
6) 中山岳彦，極異方性弾性体の多層問題の解析および幾つかの基本解の誘導，山梨大学修士論文，87pp.，2002.

（2013 年 11 月 11 日　受理）